130. 全微分方程式ノ積分ニ就テ (IV)

(広島文理大)　占部　実 (1948.11.20)

§8. Mayer ノ方法トノ関係

本節ニ於テハ $\underset{p}{\overset{\lambda}{\chi}}$ トシテ又別ノ特別ノ函数系ヲ取リ Mayer ノ方法ヲ用ルコトヲ示ス。

parameter $\overset{\mu}{m}$ $(\mu=2,3,\cdots,n-1)$ ヲ含ム函数 $\overset{\lambda}{\chi}(x,\overset{\mu}{m})$ $(\lambda=2,3,\cdots,n-1)$ ヲ取リ，是等ハ x^i ニ関シ互ニ独立デアルトスル。
$\overset{\mu}{m}$ ノ相異ナル $(n\ 1)$ 個ノ値ノ組ヲ $\underset{\rho}{\overset{\mu}{m}}$ $(\rho=1,2,\cdots,n-1)$ トシ，
$\underset{\rho}{\overset{\lambda}{\chi}} = \overset{\lambda}{\chi}(x,\underset{\rho}{\overset{\mu}{m}})$ ヲ用ヒテ §0 ノ方法ヲ行フ。ソノタメニハ此ノ $\underset{\rho}{\overset{\lambda}{\chi}}$ ハ §0 ノ條件Δ若ハ條件Aヲ満足シテヰナクテハナラナイ。即チ

$$D \equiv \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \\ \dfrac{\partial \overset{2}{\chi}}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \overset{2}{\chi}}{\partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial \overset{2}{\chi}}{\partial x^n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \dfrac{\partial \overset{n-1}{\chi}}{\partial x^1} & \dfrac{\partial \overset{n-1}{\chi}}{\partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial \overset{n-1}{\chi}}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

トスルトキ $\rho(D)$ ハ $\overset{\mu}{m}=\underset{\rho}{\overset{\mu}{m}}$ ノ時 $(n-1)$ デナケレバナラヌ。即チ
$\overset{\lambda}{\chi}(x,\overset{\mu}{m})$ ハ先ヅ次ノ條件ヲ満足シテヰナクテハナラナイ。

〔條件ρ〕　$\rho(D)=n-1$

條件ρガ成立スル $\overset{\mu}{m}$ ノ domain ヲ $\mathfrak{M}_D$ デアラハス。次ギニ §6 ノ一般論ニ従ヒ次式ノ積分ヲ考ヘル。

$$\left.\begin{aligned} \Omega &\equiv X_i dx^i = 0 \\ d\overset{\lambda}{\chi} &= d\overset{\lambda}{\chi}(x,\overset{\mu}{m}) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (8.1)$$

$\overset{\mu}{m}\in\mathfrak{M}_D$ ナル時 (8.1) ハ互ニ独立ナ $(n-1)$ 個ノ方程式ノ組ヲアラハシ　従ッテ (8.1) ハ $\overset{\lambda}{\chi}(x,\overset{\mu}{m})$ ニ独立ナ integral ヲ尚一ツ有スル。其ヲ $f(x,\overset{\mu}{m})$ トスル。今 $\underset{\rho}{\overset{\mu}{m}}$ ガ全部相互ニ十分近イ値デアルトスレバ $f(x_1,\overset{\mu}{m})$ ハ $\overset{\mu}{m}$ ガ

$\underset{\beta}{\overset{\mu}{m}}$ ノスベテノ値ヲ取ツタ時，常ニ $\overset{\lambda}{\chi}(x, \overset{\mu}{m})$ ニ独立ナル如クスルコトガ出来ル．
(8.1) ハ $\overset{\mu}{m} \in \mathfrak{M}_D$ ナル $\overset{\mu}{m}$ ニ対シテハ曲線ヲアラハス．此曲線ヲ $C(\overset{\mu}{m})$ トスル．
我々ハ此 $C(\overset{\mu}{m})$ ヲ用ヒテ§6ノ方法ヲ行ハントスルノデアルガ其為ニ次ノ仮定ヲオク．即チ parameter $\overset{\mu}{m}$ ノ相互ニ十分近キ値ノ範囲内ニ於テハ 相異ナル parameter $\overset{\mu}{m}$ ノ値ニ対シテハ相異ナル曲線 $C(\overset{\mu}{m})$ ガ対応スル．[1]

是ノ條件ハ式デアラハセバ次ノ如クナルコトガ容易ニ証明サレル．即チ

［條件M］ 曲線 $C(\overset{\mu}{m})$ 上ノ任意ノ二点 $\underset{a}{x}^i$, $\underset{b}{x}^i$ ニ対シ

$$M = \det\left|\left[\frac{\partial \overset{\lambda}{\chi}}{\partial \overset{\mu}{m}}\right]_{x=\underset{a}{x}} - \left[\frac{\partial \overset{\lambda}{\chi}}{\partial \overset{\mu}{m}}\right]_{x=\underset{b}{x}}\right| \neq 0. \qquad (8.2)$$

$\mathfrak{M}_D$ 内ニ於テ條件Mガ成立スル $\overset{\mu}{m}$ ノ domain ヲ $\mathfrak{M}$ トスル．

以下 $\overset{\lambda}{\chi}(x^i, \overset{\mu}{m})$ ハ條件 ρ 及ビ M ヲ満足スルトシ，m ハ $\mathfrak{M}$ 内ノ値ヲ取ルトスル．

$\rho(D)=n-1$ ヨリ次式ヲ満足スル如キ A^i ハ common factor ヲ除イテハ unique ニキマル．

$$\left.\begin{aligned} X_i A^i &= 0 \\ \frac{\partial \overset{\lambda}{\chi}}{\partial x^i} A^i &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (8.3)$$

然ル時曲線 $C(\overset{\mu}{m})$ ハ次式ヲ積分シテ得ラレルモノデアル．

$$\frac{dx^1}{A^1} = \frac{dx^2}{A^2} = \cdots\cdots = \frac{dx^n}{A^n} \quad (= dt \text{ トオク})$$

(8.2) ニ於テ $\underset{a}{x}^i = \underset{b}{x}^i + dx^i$ トオケバ．

$$M = \det\left|\frac{\partial^2 \overset{\lambda}{\chi}}{\partial x^i \partial \overset{\mu}{m}} dx^i\right| = (dt)^{n-2} \det\left|\frac{\partial^2 \overset{\lambda}{\chi}}{\partial x^i \partial \overset{\mu}{m}} A^i\right|$$

サテ曲線 $C(\overset{\mu}{m})$ ハ任意ノ点ヲ通ラシメ得ルカラ $\underset{b}{x}^i$ ハ全ク任意ノ点トシテヨイ．
然ルトキハ任意ノ x^i ニ対シテ $\overset{\mu}{m} \in \mathfrak{M}$ ナラバ

$$\det.\left|\frac{\partial^2 \overset{\lambda}{\chi}}{\partial x^i \partial \overset{\mu}{m}} A^i\right| \neq 0. \qquad (8.4)$$

(1) 此仮定ヲオクコトニ依リ，後述スル如ク議論ハ非常ニ簡単ニナリ，§6ノ條件Δモ自然的ニ出テ来ル．此仮定ヲオカナイ時ハ§6ノ條件Δヲ又別ニ仮定シナケレバイケナイヨウデアル．

是ヲ用ヒテ(8.8)ニ依リ定マル A^i ニ對シテ次号ヲ満足スル如キ $\overset{\mu}{\kappa}$, k ハ共ニ 0 ナルコトガ容易ニ証明出来ル.

$$\overset{\mu}{\kappa}\frac{\partial A^i}{\partial \overset{\mu}{m}}=kA^i \tag{8.5}$$

$\mathfrak{M}$ 内ニ任意ニ $\overset{\mu}{m}$ ヲ取リ $\overset{\mu}{\underset{1}{m}}$ トスル. $\overset{\mu}{\underset{1}{m}}$ ニ十分近イ $\mathfrak{M}$ 内ノ値 $\overset{\mu}{\underset{1}{m}}+\epsilon\overset{\mu}{\underset{\nu}{\xi}}$ $(\nu=2,3,\cdots,n-1)$ ヲ取ル. 此処デ ϵ ハ其絶對値ガ十分小ナル数トノ $\overset{\mu}{\xi}$ ハ $\det.|\overset{\mu}{\underset{\nu}{\xi}}|\neq 0$ トスル. $\overset{\mu}{\underset{1}{m}}+\epsilon\overset{\mu}{\underset{\nu}{\xi}}=\overset{\mu}{\underset{\nu}{m}}$ トオク. $\overset{\mu}{\underset{\nu}{m}}\in\mathfrak{M}$ ヨリ $f(D)=n-1$ $\overset{\mu}{\underset{1}{m}}$ ニ對應スル A^i ヲ $A^i(x,\overset{\mu}{m})$ デアラハセバ $A^i(x,\overset{\mu}{\underset{\nu}{m}})$ ハ $\overset{\mu}{m}=\overset{\mu}{\underset{\nu}{m}}$ ニ対応スル (8.3)ヲ満足スル. 然ルトキ $A^i(x,\overset{\mu}{\underset{1}{m}})$, $A^i(x,\overset{\mu}{\underset{\nu}{m}})$ ハ互ニ *linearly independent* ニナル. 何トナレバ次式ヲ満足スル $\overset{1}{\lambda}$, $\overset{\nu}{\lambda}$ ガアツタトスル.

$$\overset{1}{\lambda}A^i(x,\overset{\mu}{\underset{1}{m}})+\overset{\nu}{\lambda}A^i(x,\overset{\mu}{\underset{\nu}{m}})=0. \tag{8.6}$$

$\overset{1}{\lambda}$, $\overset{\nu}{\lambda}$ ハ x, $\overset{\mu}{\underset{1}{m}}$, $\overset{\mu}{\underset{\nu}{m}}=\overset{\mu}{\underset{1}{m}}+\epsilon\overset{\mu}{\underset{\nu}{\xi}}$ ノ函数デアルカラ 是等ヲ ϵ ニツキ *power series* ニ展開シ (8.6) ヲ書キナホセバ次ノ如クナル.

$$(\overset{1}{\lambda}_0+\overset{1}{\lambda}_1\epsilon+\overset{1}{\lambda}_2\epsilon^2+\cdots\cdots)A^i(x,\overset{\mu}{\underset{1}{m}})$$

$$+(\overset{\nu}{\lambda}_0+\overset{\nu}{\lambda}_1\epsilon+\overset{\nu}{\lambda}_2\epsilon^2+\cdots\cdots)\left\{A^i(x,\overset{\mu}{\underset{1}{m}})+\epsilon\left[\frac{\partial A^i}{\partial\overset{\mu}{m}}\right]_{\overset{\mu}{\underset{1}{m}}}\overset{\mu}{\underset{\nu}{\xi}}+\cdots\right\}=0 \tag{27}$$

ϵ ヲ含マヌ項ヨリ $\quad\overset{1}{\lambda}_0+\sum_{\nu=2}^{n-1}\overset{\nu}{\lambda}_0=0$

ϵ ノ 1次ノ項ヨリ $\quad(\overset{1}{\lambda}_1+\sum_{\nu=2}^{n-1}\overset{\nu}{\lambda}_1)A^i(x,\overset{\mu}{\underset{1}{m}})+\left[\frac{\partial A^i}{\partial\overset{\mu}{m}}\right]_{\overset{\mu}{\underset{1}{m}}}\overset{\nu}{\lambda}_0\overset{\mu}{\underset{\nu}{\xi}}=0.$

(8.5)ヨリ $\overset{\nu}{\lambda}_0\overset{\mu}{\underset{\nu}{\xi}}=0.$ $\overset{1}{\lambda}_1+\sum_{\nu=2}^{n-1}\overset{\nu}{\lambda}_1=0.$ サテ $\det|\overset{\mu}{\underset{\nu}{\xi}}|\neq 0.$

$\therefore\overset{\nu}{\lambda}_0=0.$ 従ツテ $\overset{1}{\lambda}_0=0.$ 然ルトキ (8.7) ニ於テ全体ヲ ϵ デ割レバ再ビ (8.7) ト同形ノ式ヲ得ル. 依テ上ト同様ニヌ $\overset{1}{\lambda}_1=\overset{\nu}{\lambda}_1=0$
同様ナ手續キヲ繰返シテ結局 $\overset{1}{\lambda}=0.$ $\overset{\nu}{\lambda}=0.$ 即チ $A^i(x,\overset{\mu}{\underset{1}{m}})$, $A^i(x,\overset{\mu}{\underset{\nu}{m}})$ ハ互ニ *linearly independent* ニナル.

是ヲ用ヒテ(8.8)ニ依リ定マル A^i ニ對シテ次式ヲ満足スル如キ $\overset{\mu}{\kappa}$, k ハ共ニ 0 ナルコトガ容易ニ証明出来ル.

$$\overset{\mu}{\kappa}\,\frac{\partial A^i}{\partial \overset{\mu}{m}} = kA^i \qquad (8.5)$$

$\mathfrak{M}$ 内ニ任意ニ $\overset{\mu}{m}$ ヲ取リ $\overset{\mu}{\underset{1}{m}}$ トスル. $\overset{\mu}{\underset{1}{m}}$ ニ十分近イ $\mathfrak{M}$ 内ノ値 $\overset{\mu}{\underset{1}{m}}+\epsilon\overset{\mu}{\underset{\nu}{\xi}}$ $(\nu=2,3,\cdots,n-1)$ ヲ取ル. 此処デ ϵ ハ其絶對値ガ十分小ナル数トシ $\overset{\mu}{\underset{\nu}{\xi}}$ ハ $\det.|\overset{\mu}{\underset{\nu}{\xi}}|\neq 0$ トスル. $\overset{\mu}{\underset{1}{m}}+\epsilon\overset{\mu}{\underset{\nu}{\xi}}=\overset{\mu}{\underset{\nu}{m}}$ トオク. $\overset{\mu}{\underset{\nu}{m}}\in\mathfrak{M}$ ヨリ $\underset{\nu}{f}(D)=n-1$ $\overset{\mu}{\underset{1}{m}}$ ニ對應スル A^i ヲ $A^i(x,\overset{\mu}{\underset{1}{m}})$ デアラハセバ

$A^i(x,\overset{\mu}{\underset{\nu}{m}})$ ハ $\overset{\mu}{m}=\overset{\mu}{\underset{\nu}{m}}$ ニ對應スル (8.3)ヲ満足スル. 然ルトキ $A^i(x,\overset{\mu}{\underset{1}{m}})$, $A^i(x,\overset{\mu}{\underset{\nu}{m}})$ ハ互ニ *linearly independent* ニナル. 何トナレバ次式ヲ満足スル $\overset{1}{\lambda}$, $\overset{\nu}{\lambda}$ ガアッタトスル.

$$\overset{1}{\lambda}A^i(x,\overset{\mu}{\underset{1}{m}})+\overset{\nu}{\lambda}A^i(x,\overset{\mu}{\underset{\nu}{m}})=0. \qquad (8.6)$$

$\overset{1}{\lambda}$, $\overset{\nu}{\lambda}$ ハ x, $\overset{\mu}{\underset{1}{m}}$, $\overset{\mu}{\underset{\nu}{m}}=\overset{\mu}{\underset{1}{m}}+\epsilon\overset{\mu}{\underset{\nu}{\xi}}$ ノ函数デアルカラ 是等ヲ ϵ ニツキ *power series* ニ展開シ (8.6) ヲ書キナホセバ次ノ如クナル.

$$\begin{aligned}&(\overset{1}{\lambda}_0+\overset{1}{\lambda}_1\epsilon+\overset{1}{\lambda}_2\epsilon^2+\cdots\cdots)A^i(x,\overset{\mu}{\underset{1}{m}})\\ &+(\overset{\nu}{\lambda}_0+\overset{\nu}{\lambda}_1\epsilon+\overset{\nu}{\lambda}_2\epsilon^2+\cdots\cdots)\left\{A^i(x,\overset{\mu}{\underset{1}{m}})+\epsilon\left[\frac{\partial A^i}{\partial\overset{\mu}{m}}\right]_{\overset{\mu}{\underset{1}{m}}}\overset{\mu}{\underset{\nu}{\xi}}+\cdots\right\}=0 \quad (27)\end{aligned}$$

ϵ ヲ含マヌ項ヨリ $\quad \overset{1}{\lambda}_0+\sum_{\nu=2}^{n-1}\overset{\nu}{\lambda}_0=0$

ϵ ノ1次ノ項ヨリ $\quad (\overset{1}{\lambda}_1+\sum_{\nu=2}^{n-1}\overset{\nu}{\lambda}_1)A^i(x,\overset{\mu}{\underset{1}{m}})+\left[\frac{\partial A^i}{\partial\overset{\mu}{m}}\right]_{\overset{\mu}{\underset{1}{m}}}\overset{\nu}{\lambda}_0\overset{\mu}{\underset{\nu}{\xi}}=0.$

(8.5)ヨリ. $\overset{\nu}{\lambda}_0\overset{\mu}{\underset{\nu}{\xi}}=0.$ $\quad \overset{1}{\lambda}_1+\sum_{\nu=2}^{n-1}\overset{\nu}{\lambda}_1=0.$ サテ $\det|\overset{\mu}{\underset{\nu}{\xi}}|\neq 0.$

$\therefore\ \overset{\nu}{\lambda}_0=0.$ 從ッテ $\overset{1}{\lambda}_0=0.$ 然ルトキ (8.7)ニ於テ全体ヲ ϵ デ割レバ再ビ (8.7)ト同形ノ式ヲ得ル. 依テ上ト同様ニシテ $\overset{1}{\lambda}_1=\overset{\nu}{\lambda}_1=0$

同様ナ手續キヲ繰返シテ結局 $\overset{1}{\lambda}=0.$ $\overset{\nu}{\lambda}=0.$ 即チ $A^i(x,\overset{\mu}{\underset{1}{m}})$, $A^i(x,\overset{\mu}{\underset{\nu}{m}})$ ハ互ニ *linearly independent* ニナル.

カクテ $\overset{\lambda}{\chi}(x, \overset{\mu}{m})$ ガ條件 f, M ヲ滿足スル時ハ, $\mathfrak{M}$ 内ニ適當ニ相互ニ十分近イ値 $\overset{\mu}{\underset{p}{m}}$ $(p=1,2,\cdots,n-1)$ ヲエラビ, $\overset{\lambda}{\underset{p}{\chi}} \equiv \overset{\lambda}{\chi}(x, \overset{\mu}{\underset{p}{m}})$ ガ §6 ノ條件 A ヲ滿足スル如クスルコトガ出來ル。

カクテ我々ハ此ノ $\overset{\lambda}{\underset{p}{\chi}}$ ヲ用ヒテ §6 ノ方法ヲ行フコトガ出來ル。即チ次ノ如クデアル。

任意ニ一点 $P_0(\underset{0}{\chi})$ ヲ取リ 此点ヲ通ル曲線 $C(\overset{\mu}{\underset{1}{m}})$ ヲ引キ $C(\underset{1}{m})$ 上ニ他ニ任意ニ一点 $P_1(\underset{1}{\chi})$ ヲ取ル. $P_1(\underset{1}{\chi})$ ヲ通ル曲線 $C(\underset{2}{m})$ ヲ引キ 此上ニ他ニ任意ニ一点 $P_2(\underset{2}{\chi})$ ヲ取ル. 是ヲ順次繰返シテ点 $P_{n-1}(\underset{n-1}{\chi})$ ニ至ル. 然ル時是等ノ点ノ座標ノ間ニ次ノ関係式ガ得ラレル。

$$\left.\begin{aligned} &f(\underset{p-1}{\chi}, \underset{p}{m}) = f(\underset{p}{\chi}, \underset{p}{m}), \\ &\overset{\lambda}{\chi}(\underset{p-1}{\chi}, \underset{p}{m}) = \overset{\lambda}{\chi}(\underset{p}{\chi}, \underset{p}{m}), \end{aligned}\right\} \tag{8.8}$$

扨 $\Omega=0$ ガ *integrable* ナル時ハ 其任意ノ *integral* ヲ $\varphi(\chi)=const.$ トスレバ (6.19) ヲ導出シタト同ジ理由ニ依リ次式ヲ得ル。

$$f = f\{\varphi(\chi), \overset{\lambda}{\chi}(x, \overset{\mu}{m})\}. \tag{8.9}$$

而モ f ハ $\overset{\lambda}{\chi}$ ニ独立デアルカラ $\dfrac{\partial f}{\partial\varphi} \neq 0$. §6 ノ一般論ヨリ今ノ場合條件 A ガ滿足サレテヰルカラ (8.8) ヨリ $\underset{1}{\chi^i}, \cdots, \underset{n-2}{\chi^i}$ ヲ消去スルトキハ 得ラレタ消去式ハ $\varphi(\underset{0}{\chi}) = \varphi(\underset{n-1}{\chi}) =$ *algebraically equivalent* ニナル. 扨 (8.9) ノ関係ヲ用ヒレバ (8.8) ヨリ $\varphi(\underset{p-1}{\chi}) = \varphi(\underset{p}{\chi})$ 是ハ (8.8) ニ於テ $\overset{\mu}{\underset{p}{m}}$ ヲ消去シタモノデアル。

扨條件 M ヨリ $\overset{\lambda}{\chi}(\underset{p-1}{\chi}, \overset{\mu}{m}) - \overset{\lambda}{\chi}(\underset{p}{\chi}, \overset{\mu}{m})$ ハ $\overset{\mu}{m}$ ニ関シ互ニ独立デアル. 故ニ消去式ハ高々一ツデアル、即チソノ消去式ハ必ズ $\varphi(\underset{p-1}{\chi}) = \varphi(\underset{p}{\chi}) =$ *algebraically equivalent* ニナル。

$\underset{1}{\chi^i}, \cdots, \underset{n-2}{\chi^i}$ ヲ消去セルモノト同形ノ式デアル.

換言スレバ $p=1,2,\cdots,n-1$ ニ對スル (8.8) ヨリ $\underset{1}{\chi^i}, \cdots, \underset{n-2}{\chi^i}$ ヲ消去スルコトハ一ツノ (8.8) ヨリ $\overset{\mu}{\underset{p}{m}}$ ヲ消去スルコトデオキカヘラレルコトニナリ, 次ノ結果ガ得ラレタ事ニナル. 即チ

$\Omega=0$ ガ *integrable* ナル時ハ, 其任意ノ *integral* ヲ $\varphi(\chi)=const.$

トスレバ $f(\underset{0}{x},\overset{\mu}{m})=f(x,\overset{\mu}{m})$, $\overset{\lambda}{\chi}(\underset{0}{x},\overset{\mu}{m})=\overset{\lambda}{\chi}(x,\overset{\mu}{m})$ ヨリ $\overset{\mu}{m}$ ヲ消去スル時，消去式ハ一ツ唯一ツ存在シ，其ハ常ニ $\varphi(x)=\varphi(\underset{0}{x})$ ニ帰着セシメルコトガ出来ル．

次ギニ逆ヲ考ヘル．即チ條件 ρ, M ヲ満足スル函数 $\overset{\lambda}{\chi}$ ヲ用ヒ $\mathfrak{M}$ ニ居スル $\overset{\mu}{m}$ ヲ取リ $\Omega=0$, $d\overset{\lambda}{\chi}(x,\overset{\mu}{m})=0$ ヲ積分シ $\overset{\lambda}{\chi}(x,\overset{\mu}{m})$ ニ独立ナ integral ヲ $f(x,\overset{\mu}{m})$ トスル．然ルトキ

$$\left.\begin{aligned} f(\underset{0}{x},\overset{\mu}{m}) &= f(x,\overset{\mu}{m}) \\ \overset{\lambda}{\chi}(\underset{0}{x},\overset{\mu}{m}) &= \overset{\lambda}{\chi}(x,\overset{\mu}{m}) \end{aligned}\right\} \qquad (8.10)$$

ヨリ $\overset{\mu}{m}$ ヲ消去スル時，條件 M ニヨリ消去式ハ高々一ツトナル．此時消去式ガ $\phi(\underset{0}{x})=\phi(x)$ ノ形トナルナラバ $\Omega=0$ ハ integrable ニシテ $\phi(x)=$ const. ガ其ノ integral トナルコトヲ証明スルコトガ出来ル．

証明ハ次ノ通リ．

條件 ρ, M ガ成立スルカラ $\mathfrak{M}$ 内ニ $\overset{\mu}{m}=\overset{\mu}{\underset{1}{m}}$ ニ十分近イ値 $\overset{\mu}{\underset{\nu}{m}}$ $(\nu=2,3,\cdots,n-1)$ ヲ取リ $\overset{\mu}{\underset{1}{m}},\overset{\mu}{\underset{\nu}{m}}$ カラ作ッタ $\overset{\lambda}{\underset{p}{\chi}}=\overset{\lambda}{\chi}(x,\overset{\mu}{\underset{p}{m}})$ $(p=1,\cdots,n-1)$ ハ§6ノ條件 A ヲ満足スル如クスルコトガ出来ル．ソシテ (8.10) ノ $f(x,\overset{\mu}{m})$ ハ $\overset{\mu}{m}$ ガ是等 $\overset{\mu}{\underset{p}{m}}$ ノ値ノ時点ニ $\overset{\lambda}{\chi}(x,\overset{\mu}{m})$ ニ独立ニナル．然ルトキ此 $\overset{\mu}{\underset{p}{m}}$ ヲ用ヒテ曲線 $C(\underset{p}{m})$ ヲ作リ，任意ノ点 $P_0(\underset{0}{x})$ カラ出発シテ (8.8) ヲ作ッタト同様ニシテ点 $P_1(\underset{1}{x})$, $P_2(\underset{2}{x})$, ……, $P_{n-1}(\underset{n-1}{x})$ ヲ作ル．然ルトキ其等ノ点ノ座標ノ間ニ (8.8) ノ関係式ヲ得ル．サテ (8.10) ヨリ $\overset{\mu}{m}$ ヲ消去セル結果ガ $\phi(\underset{0}{x})=\phi(x)$ ナル故 (8.8) ヨリ $\overset{\mu}{\underset{p}{m}}$ ヲ消去スレバ $\phi(\underset{p-1}{x})=\phi(\underset{p}{x})$ ヲ得ル．然ルトキ $p=1,2,\cdots,n-1$ トスレバ $\phi(\underset{0}{x})=\phi(\underset{n-1}{x})$ ヲ得ル．即チ (8.8) ヨリ $\underset{1}{x}^i,\cdots,\underset{n-2}{x}^i$ ヲ消去シテ $\phi(\underset{0}{x})=\phi(\underset{n-1}{x})$ ヲ得ル．然ルトキ §6ノ條件 A ガ成立シテヰルカラ $\Omega=0$ ハ integrable トナリ 其時ノ $\phi(x)=$ const. ガ $\Omega=0$ ノ integral トナル．

カクテ次ノ結果ガ得ラレタ事ニナル．

$\Omega=0$ ガ integrable ナルタメノ必要ニシテ且十分ナル條件ハ (8.10) ヨリ $\overset{\mu}{m}$ ヲ消去セル結果ガ $\phi(\underset{0}{x})=\phi(x)$ ノ形トナルコトデアル．ソシテ此ノ時得ラレタ $\phi(x)=$ const. ガ求ムル $\Omega=0$ ノ integral トナル．

上述ノ方法ニアリテハ $\Omega=0$ ノ *integral* ヲ求ムルニ当テ $\Omega=0$, $d\overset{\lambda}{\chi}(x,\overset{\mu}{m})=0$ ヲ唯一回積分スルコトニヨツテ解ヲ得ルコトガ出来ル。他ノ方法― *Natani* ノ方法　一般ノ *Reymond* ノ方法等ガ $(n-1)$ 回ノ積分ヲ要スルニ比シ非常ニ簡単デアル。

條件 ρ, M ヲ満足スル函数ノ中特ニ簡單ナモノトシテハ　例ヘバ次ノ如キモノガアル。

$$\overset{\lambda}{\chi}=x^{\lambda}-x^{n}\overset{\lambda}{m}\quad(\lambda=2,3,\cdots\cdots,n-1).\qquad(8.11)$$

是ガ條件 ρ, M ヲ満足スルコトハ容易ニ証明サレル。是ヲ用ヒテ

$\Omega=0$ ヲ解クニハ

$$\overset{\lambda}{\chi}(x,\overset{\mu}{m})=x^{\lambda}-x^{n}\overset{\lambda}{m}=\overset{\lambda}{\chi}(\underset{0}{x},\overset{\mu}{m})=\underset{0}{x}^{\lambda}-\underset{0}{x}^{n}\overset{\lambda}{m}$$

$$\text{i.e.}\quad x^{\lambda}=\underset{0}{x}^{\lambda}+(x^{n}-\underset{0}{x}^{n})m^{\lambda}$$

是ヲ $\Omega\equiv X_i\,dx^i=0$ ニ代入シ,

$$X_1\,dx^1+(X_\lambda\overset{\lambda}{m}+X_n)\,dx^n=0.$$

此処デハ変数ハ x^1 及ビ x^n ノミトナル。是ノ *integral* f ハ $X_1\neq0$ ヨリ x^1 ヲ含ム。故ニ $\overset{\lambda}{\chi}=$ 独立デアル。次式ヨリ $\overset{\lambda}{m}$ ヲ消去スル。

$$\left.\begin{aligned}&f(x,\overset{\lambda}{m})=f(\underset{0}{x},\overset{\lambda}{m})\\&x^{\lambda}-x^{n}\overset{\lambda}{m}=\underset{0}{x}^{\lambda}-\underset{0}{x}^{n}\overset{\lambda}{m}\end{aligned}\right\}$$

消去ノ結果ハ $\Omega=0$ ガ *integrable* ナル時ハ，其ノ任意ノ *integral* ヲ $\varphi(x)=\text{const.}$ トスレバ必ズ $\varphi(\underset{0}{x})=\varphi(x)$ ニ帰着セシメルコトガ出来ル

又逆ニ消去式ガ $\phi(\underset{0}{x})=\phi(x)$ ノ形トナルナラバ $\Omega=0$ ハ *integrable* ニシテ其時得ラレタ $\phi(x)=\text{const.}$ ガ $\Omega=0$ ノ *integral* トナル。

(8.11) ノ $\overset{\lambda}{\chi}$ ヲ採用シ上ノ如クシテ $\Omega=0$ ヲ解ク方法ハ即チ *Mayer* ノ方法デアル。

以上前節及ビ本節ニ於テ我々ハ *Natani* ノ方法，*Mayer* ノ方法ハ何レモ *Reymond* ノ方法ニ於テ $\overset{\lambda}{\underset{p}{\chi}}$ トシテ特別ノモノヲ選ンダ場合デアルコトヲ示シタ。カクテ此等ノ方法ヲ *Reymond* ノ立場カラ統一的ニ見ルコトガ可能トナツタ。

§9 全微分方程式系ヘノ拡張

36ノ議論ハ全微分方程式ノ系ニ迄拡張出来ル。証明ハ大体同様デアルカラ結果ノミヲ述ベヨウ。

全微分方程式ノ系

$$\overset{\alpha}{\Omega} \equiv \overset{\alpha}{X}_i\, dx^i = 0 \qquad (\alpha = 1, \cdots, m,\ m < n)$$

ヲ考ヘル。函数系 $\overset{\lambda}{\underset{\rho}{\chi}}$ $(\rho = 1, 2, \cdots, l = n - m;\ \lambda = m+1, \cdots, n-1)$ ヲ取リ次ノ如クオク

$$\underset{\rho}{D} \equiv \begin{pmatrix} \overset{1}{X}_1 & \cdots & \overset{1}{X}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \overset{m}{X}_1 & \cdots & \overset{m}{X}_n \\ \dfrac{\partial \overset{m+1}{\underset{\rho}{\chi}}}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial \overset{m+1}{\underset{\rho}{\chi}}}{\partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \overset{n-1}{\underset{\rho}{\chi}}}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial \overset{n-1}{\underset{\rho}{\chi}}}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \underset{1}{D} & 0 & & & & 0 \\ -\underset{2}{D} & \underset{2}{D} & 0 & & & \vdots \\ 0 & -\underset{3}{D} & \underset{3}{D} & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \\ & & & & & 0 \\ 0 & \cdots & & & -\underset{l-1}{D} & \underset{l-1}{D} \\ 0 & \cdots & & & 0 & -\underset{l}{D}' \end{vmatrix}$$

但シ $\underset{\rho}{D}'$ ハ $\underset{\rho}{D}$ ヨリ其ノ第1.2.⋯, m 行ヲ除イテ得ル *matrix* ヲアラハス。

斯クノ函数系 $\overset{\lambda}{\underset{\rho}{\chi}}$ ニ對シテハ $\Delta \neq 0$ トスル。

然ル時 $\overset{\alpha}{\Omega} = 0$, $d\underset{\rho}{\chi} = 0$. *integral* ノ中 $\overset{\lambda}{\underset{\rho}{\chi}}$ ニ獨立ナ *integral* カ m 個存在スル。其ヲ $\overset{\alpha}{\underset{\rho}{f}}$ トスル。然ルトキ我々ハ §6 ノ同様ニ次ノ結果ヲ得ル。即チ、

$\overset{\alpha}{\Omega} = 0$ ガ *integrable* ナルタメノ必要ニシテ且ツ十分ナ條件ハ

$$\left.\begin{aligned}\overset{\alpha}{\underset{p}{f}}(\underset{p-1}{x^i}) &= \overset{\alpha}{\underset{p}{f}}(\underset{p}{x^i}) \\ \overset{\lambda}{\underset{p}{\chi}}(\underset{p-1}{x^i}) &= \overset{\lambda}{\underset{p}{\chi}}(\underset{p}{x^i})\end{aligned}\right\}\quad (p=1,2,\cdots,l)$$

ヨリ $\underset{1}{x^i},\cdots,\underset{l-1}{x^i}$ ヲ消去スル時 消去式ガ $\overset{\alpha}{\phi}(\underset{0}{x^i})=\overset{\lambda}{\phi}(\underset{l}{x^i})$ ノ形トナルコトデアル. ソシテ此時得ラレタ $\overset{\alpha}{\phi}(x^i)=const.$ ガ求ムル $\overset{\alpha}{\Omega}=0$ ノ integral トナル.

〔終〕