129. 一様位相空間ノ上ノ函数ガ作ル束,環ニヨル一様位相ノ表現ニツイテ

長田 潤一 (1948.11.10)

bicompact 可附番性ヲ仮定セヌ *Completely regular* 空間ニ *Gelfand Silov* 等ノ理論ヲ拡張シ次ニ一様位相ヲ表現スルコトヲ試ミル.

O. R. 空間Rニオイテ $\geqq 0$ナル連続函数ノ *sup* トシテアラワサレ、シカモ有界ナル函数全体ヲ考ヘルトコレハ $\geqq$ ニヨリ束ヲナスコノ束ニハ正整数ノ *operater* ガツイテヰルト考ヘラレル. コノ束ヲ $L_S(R)$ デアラワス。

定理I. R_1, R_2ガ *homeomorph* ナルタメノ必充條件ハ $L_S(R_1)$ ト $L_S(R_2)$ トガ *operation-isomorph* ナルコトデアル.

Proof ガ必要ハ明カ.

$L_S(R)$ ノ operation デ動カヌ極大 ideal Ⅰノウチソノ任意ノ部分集合 A ヲ Ⅰ ヲトルト $\sup_{f_\alpha \in A} f_\alpha$ ガ存在スレバ $\in$ Ⅰ ナルモノヲ考ヘル（lattice トシテノ sup. ハ函数トシテノ sup. トナツテヰル）コノヨウナ ideal ヲ c.m. ideal ト云フコトニスル一点 a デ 0 ニナル函数スベテノ集合ハ $L_S(R)$ デ c.m. ideal ヲナス. コレヲ $I(a)$ トカク.

$I(a)$ ガ max. ナコトダケヲ云フ.

$I(a) \subset I \ni \psi$. $\psi(a) \neq 0$ ナラ. $\psi = \sup_\alpha f_\alpha$ (f_α ; cont.) トスルト. アル f_α ヲトルト $\psi(x) \geqq f_\alpha(x) > \varepsilon > 0$ ($x \in U(a)$) ナル a ノ近傍 $U(a)$ ガアル.

$$g(a) = 0$$

$$g(x) = 1 \quad (x \in U^c(a)) \quad 0 \leqq g \leqq 1 \text{ ナル連続函数 (Cont. fun.)}$$

$g(x)$ ヲツクルト $g \in I(0) \subset I$

$$I \ni \varphi = \sup.\{\psi . g\} > \varepsilon \quad \therefore \varepsilon = \varepsilon \frown \varphi \in I$$

$\therefore$ $n\varepsilon \in I$. $L_S(R)$ ノ函数ハ何レモ有界ナル故 $I = L_S(R)$

逆ニ c.m. ideal Ⅰ ハスベテ $I(a)$ ノ形トナル.

$I = \{f_\alpha\}$ $N_{\frac{1}{n},\alpha} = \{x \mid f_\alpha(x) \leqq \frac{1}{n}\}$ トスルト.

$$N_{\frac{1}{n},\alpha} \frown N_{\frac{1}{n},\beta} \neq \phi$$

$\therefore = \phi$ トスルト $I \ni f_\alpha \smile f_\beta > \frac{1}{n} \frown \frac{1}{m}$

$\therefore$ $I = L_S(R)$ コレハ不合理

ソシテ $N_{\frac{1}{n},\alpha} \frown N_{\frac{1}{n},\beta} \in \mathfrak{N}$ ナル故 $\{N_{\frac{1}{n},\alpha}\} = \mathfrak{N}$ ハ filter ヲナス.

コレカラ導カレル有向点集合 $\varphi(p|\mathfrak{N})$ ヲ考ヘルト.

コノ上デハスベテノ $f_\alpha \to 0$（即チ任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シ $p > p_0$ ナラ $f_\alpha(\varphi(p)) < \varepsilon$ ナル p_0 ガアル）

モシモ $\varphi(p|\mathfrak{N})$ ガ cluster pt a ヲモツトスルト.

$$f_\alpha(a) = 0 \quad (\forall f_\alpha \in I) \quad \therefore I \subset I(a) \quad \therefore I = I(a)$$

モシ cluster point ヲモタネバ.

R ノ各点 x ニ $U(x)$ ナル近傍ヲ対応サセ. $\varphi(p|\mathfrak{N})$ ガ $U^c(x)$ デ residual ナル如クデキル. 各 $U(x)$ ニ對シ.

$$\left.\begin{array}{l} f_x(x)=1 \\ f_x(y)=0 \quad (y\in U^c(x)) \end{array}\right\} 0\leqq f_x\leqq 1 \text{ナル Cont. fun. } f_x$$

ヲツクルト $f_x\in I \quad (\forall x)$

$\because$ $f_x\notin I$ ナラバ $\{f_x, I\}=J$ (f_x, I ノ生成スル最小ノ operation-ideal) ヲツクルト $J=\{f \mid f\leqq nf_x\vee f_2,\ f_2\in I\ \ n: \text{正整数}\}$ ニナルガ.

$J\supsetneqq I$ シカモ $J\ni\psi$ ナラ $\varphi(p\mid\mathfrak{X})$ ノ上デ $\psi\to 0$ ナル故 $J\neq L_s(R)$

コレハ I ガ max ナルコトニ反ス. $\therefore$ $f_x\in I$.

$\therefore$ $1=\sup\limits_{x\in R} f_x\in I$ $\quad\therefore$ $I=L_s(R)$. コレハ不合理.

即チ $\varphi(p\mid\mathfrak{X})$ ハ cluster pt. ヲモタネバナラヌ.

コレデ c. m. ideal ト $I(a)$ ナル形ノ ideal トハ一致スルコトガワカッタ.

故ニ c. m. ideal ノ作ル集合 $\mathcal{L}(R)$ ヲ考ヘルト.

$\mathcal{L}(R)$ ト R トノ間ニ一対一ノ対応ガツク.

コノ $\mathcal{L}(R)$ ニ次ノ如ク位相ヲ入レル.

$R^*\supset A=\{I_\chi\}$ ノ集積点トシテハ $I_\gamma\subset I$ ナル点 (c. m. ideal) I ヲトルトスルト連続函数ノ環ノ場合ト同様ニ $\mathcal{L}(R)$ ト R ハ homeomorph ニナル.

故ニ $L_S(R_1)$ ト $L_S(R_2)$ トノ operation-isomorph カラ $\mathcal{L}(R_1)$ ト $\mathcal{L}(R_2)$ トノ homeomorph.

従ッテ R_1 ト R_2 トノ homeomorph ガ従フ.

定理 I ノ証明終.

次ニ一様位相空間 R デ $\geqq 0$ ナル一様連続函数 (U. fun.) ノ sup トナリ有界ナル函数スベテガ作ル latice ヲ $L_{US}(R)$ U. fun ノ非負部分集ヲ $L_U(R)$ トアラワス $L_{US}(R)$ ニハ正整数ノ operator ガツイテヰルモノト考ヘル.

定理 II 全有界ナ一様位相空間 R_1, R_2 ガ一様同相ナル必要充分条件ハ $L_U(R_1)$ ト $L_U(R_2)$ ガ對応シテヰル如ク $L_{US}(R_1)$ ト $L_{US}(R_2)$ トガ operation-isomorph ニナルコトデアル. (lattice 意味ノ sup. ハ fun ノ意味ノ sup. ト一致シテヰル)

Proof. 必要ハ明カ.

全有界ト照ラス孟カ一般ナ一様位相空間Rニ於イテ考ヘル $L_U(R)$ ノ operation デ動カス max. ideal I ノウチ $I \ni A$ ナラ $\sup_{f_\alpha \in A} f_\alpha \in L_U(R)$ (sup ハ $L_{US}(R)$ ニオケル意味) ナラバ $\sup_{f_\alpha \in A} f_\alpha \in I$ ナルモノ c.m. ideal ト考ヘル. スルト定理Iト略々同様ニ c.m. ideal トI(a)ナル形ノ ideal トハ一致スルコトガワカル. ソコデ c.m ideal ノ作ル set ヲ $\mathcal{L}(R)$ トスル. ココニRト同相ニナル如ク位相ヲ入レ得ル事モ定理Iト同様デアル.

次ニ一般ニ一様位相空間ノニツノ部分集合A. Bガ

$$\varphi(x)=0 \quad (x \in A)$$
$$\quad =1 \quad (x \in B) \qquad 0 \leqq \varphi \leqq 1$$

ナルU. fun.(一様連続)ガアルトキ(或ハ $S(A, \mathfrak{m}) \frown B = \phi$ ナル一様ヒフクガアルトキ) U-分離デアルトイフ.

$\mathcal{L}(R)$ デ. ソノ部分集合 $\mathcal{L}(A)$, $\mathcal{L}(B)$ (RデA, Bニ對応スルモノ)

$\mathcal{L}(A)=\{I_\gamma\}$, $\mathcal{L}(B)=\{J_\delta\}$ トスルト $\frown I_\gamma$ ト $\frown J_\delta$ ガ $L_U(R)$ ヲ生成スル. 部分 $\{\frown I_\gamma, \frown J_\delta\}=L$ ガ $L=L_U(R)$ テルトキソノトキニ限リ $\mathcal{L}(A)$ ト $\mathcal{L}(B)$ トハ U-分離デアルトイフコトニスルト

lemma $\mathcal{L}(A)$, $\mathcal{L}(B)$ ガ U-分離ナコトト. A. Bガ U-分離ナコトトハ同値デアル.

Proof A. BガU-分離ナラバ.

$$A \subset U \quad B \subset V, \quad U \frown V = \phi$$

A. U^c 及ビ B, V^c ハソレゾレ U-分リナル U, V ガアル.

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=0 \ (x \in A) \\ &=1 \ (x \in U^c) \end{aligned}\right\} 0 \leqq f \leqq 1, \quad \left.\begin{aligned} g(x)&=0 \ (x \in B) \\ &=1 \ (x \in V^c) \end{aligned}\right\} 0 \leqq g \leqq 1$$

ナル U. fun f, g ヲツクルト.

$$f \in \frown I_\gamma, \quad g \in \frown J_\delta$$
$$\therefore \quad 1 = f \smile g \in \{\frown I_\gamma, \frown J_\delta\} = L$$
$$\therefore \quad L = L_U(R)$$

逆ノ方ハ $\{\frown I_\gamma, \frown J_\delta\} = \{f \mid f \leqq f_1 \smile f_2,\ f_1 \in \frown I_\gamma,\ f_2 \in \frown J_\delta,\ 0 \leqq f,\ f \text{ 有界 } U.\text{cont}\}$

トナルコトニ注意シテ

A. BガU-分リデナイトスルトRノ Uniformity ヲ$\{\mathfrak{M}_x\}$トスルト

$S(B, \mathfrak{M}_x) \cap A \ni \varphi(x)$ ナル有向点集合 $\varphi(x|\mathfrak{X})$ヲ考ヘル

$f_1 \in \cap I_r,\quad f_2 \in \cap J_\delta$ トスルト $f_1(x)=0 \quad (x\in A)$

f_2 ハU. fun ニシテ $f_2(B)=0$ ナル故 $f_2(\varphi(x)) \to$

$\therefore\ f_1 \cup f_2 \to 0 \quad (\varphi(x|\mathfrak{X})$ ノ上デ$)$

即チ $L \ni f$ ナラバ $f(\varphi(x)) \to 0$ 故ニ $L \neq L_U(R)$

即チ $\mathcal{L}(A)$ ト $\mathcal{L}(B)$ トハU-分リデナイ.

以下特ニRガ全有界ノ場合ヲ考ヘル.

$\mathcal{L}(R)$ ニ次ノ如ク一様位相ヲ入レル.

$\mathcal{L}(R)$ノ開ヒフク $\mathcal{L}(\mathfrak{N})$ガ次ノ条件(T)ヲミタストキ 一様ヒフク=トル.

(T) $\mathcal{L}(\mathfrak{N})$ハ次ノ如キ *-refinement $\mathcal{L}(\mathfrak{N}_*)$ ヲモツ

$\mathcal{L}(\mathfrak{N}_*)$ ハ有限部分ヒフクヲモツ.

$S(\mathcal{L}(N_*), \mathcal{L}(\mathfrak{N}_*)) \subset \mathcal{L}(N) \quad (\mathcal{L}(N_*) \in \mathcal{L}(\mathfrak{N}_*), \mathcal{L}(N) \in \mathcal{L}(\mathfrak{N}))$

トスレバ $\mathcal{L}(N_*)$ ト $\mathcal{L}(N)$ トハU-分リデアル.

スルト $\{\mathcal{L}(\mathfrak{N})\}$ノRニオケル像 $\{\mathfrak{N}\}$ハ $\{\mathfrak{M}_x\}$ト一致スル.

即チ Rト$\mathcal{L}(R)$トハ一様同相ニナル.

Rノ任意ノ一様ヒフク$\mathfrak{M}_x$ヲトルトRハ全有界ナル故

$\mathfrak{M}_x$ノ*-refinement $\mathfrak{M}_y \in \{\mathfrak{M}_x\}$ ハ有限部分ヒフクヲモチ

$S(M_y, \mathfrak{M}_y) \subset M_x,\ (M_y \in \mathfrak{M}_y,\ M_x \in \mathfrak{M}_x)$ トスルト M_y ト M_x トハU分離デアル.

従ッテ lemma ニヨリ $\mathfrak{M}_x$ノ$\mathcal{L}(R)$ニオケル像 $\mathcal{L}(\mathfrak{M}_x)$ ハ条件(T)ヲミタス.

逆ニ(T)ヲミタス開ヒフク$\mathcal{L}(\mathfrak{N})$ノRニオケル像$\mathfrak{N}$ハ $\mathfrak{N} \in \{\mathfrak{M}_x\}$ シレニハ $\mathfrak{M}_x^{\circ} < \mathfrak{N}\,;\ \mathfrak{M}_x \in \{\mathfrak{M}_x\}$ ナル$\mathfrak{M}_x$ ガアルコトヲイフトヨイ. シカラズトスルト. スベテノxニ対シ $S(\varphi(x), \mathfrak{M}_x) \not\subset N \ (\forall N \in \mathfrak{N})$ ナルRノ点$\varphi(x)$ヲ対応セシメ得ル. スルト$\varphi(x|\mathfrak{X})$ハ有向点集合ヲナス.

lemma ニヨリ $\mathfrak{N}$モ(T)ヲミタスカラ (T)ノ star, refinement $\mathfrak{N}_*$ヲトル. $\mathfrak{N}_*$ハ有限部分ヒフクヲモツカラ.

$\exists N_* \in \mathfrak{N}_*$: $\varphi(x)$ confinal in N_*

$S(N_i, \mathfrak{N}_k) \subset N (\in \mathfrak{N})$ トスルト

任意ノ x ニ對シ $\exists\, x'$: $\varphi(x') \in N_k$, $x' > x$

$$S(\varphi(x'), \mathfrak{N}_{x'}) \frown N^c \neq \phi. \qquad S(N_k, \mathfrak{N}_x) \frown N^c \neq \phi$$

即チ N_k ト N^c トハU-分リデハナイ　コレハ不合理

$$\therefore \quad \mathfrak{N} \in \{\mathfrak{N}_x\}$$

故ニ定理ノ條件ガナリタテバ $\mathcal{L}(R_1)$ ト $\mathcal{L}(R_2)$ トハ一様同相. 從ツテ R_1 ト R_2 ハ一様同相ニナル.

定理IIノ証明終

定理III.　Rガ metric ノトキニハ全有界デナクテモ一般ニ定理IIガイヘル.

Proof. $\mathcal{L}(R)$ ナル位相空間ヲ作ルコトハ同ジ.

Lemma ハヤハリ云ヘル. コノ $\mathcal{L}(R)$ ニ次ノ如ク一様位相ヲ入レル.

$\mathcal{L}(R)$ ノ開ヒフク $\mathcal{L}(\mathfrak{N})$ ガ次ノ條件ヲミタストキ一様ヒフクニトル

1. 次ノ如キ條件ヲミタス $\mathcal{L}(\mathfrak{N})$ ノ *-refinement $\mathcal{L}(\mathfrak{N}_1)$; ソノ *-refinement $\mathcal{L}(\mathfrak{N}_2)$, ソノ *-refinement $\mathcal{L}(\mathfrak{N}_3)$ ヲモツ.

2. $S(\mathcal{L}(N_1), \mathcal{L}(\mathfrak{N}_1)) \subset \mathcal{L}(N)$. ($\mathcal{L}(N_1) \in \mathcal{L}(\mathfrak{N}_1)$, $\mathcal{L}(N) \in \mathcal{L}(\mathfrak{N})$) ナラ $\mathcal{L}(N_1)$ ト $\mathcal{L}^c(N)$ トハU-分リデアル.

3. $\exists\, \{a_n\}$ ナル点列ガアリ $S(a_n, \mathcal{L}(\mathfrak{N}_2)) \frown S(a_m, \mathcal{L}(\mathfrak{N}_2)) = \phi, (m \neq n)$ ナラバ $\{a_n\}$ ノ交ラヌ部分集合 $\{b_p\}, \{c_q\}$ ヲトルト $\bigcup_p S(b_p, \mathcal{L}(\mathfrak{N}_3))$ ト $\bigcup_q S(c_q, \mathcal{L}(\mathfrak{N}_3))$ トハU-分リデアル.

4. $\exists$ 点列ニオイテ $\{a_n\}$ ト, $S^c(a_n, \mathcal{L}(\mathfrak{N}_3))$ トハU-分リデアル

$\{\mathcal{L}(\mathfrak{N})\}$ ノRニオケル像 $\{\mathfrak{N}\}$ ガRノ一様ヒフク系ニナッテヰルコトガ云ヘルトヨイ.

ρ ノ $S_\varepsilon(a) = \{x \mid \rho(x, a) < \varepsilon\}$ ノツクル一様ヒフクヲ考ヘルト $\{S_{\frac{\varepsilon}{8}}(a)\}$ $\{S_{\frac{\varepsilon}{18}}(a)\}$, $\{S_{\frac{\varepsilon}{54}}(a)\}$ ヲ 1 ニ云フヒフクトシテトルトヨイ.

(例ヘハ $S_{\frac{\varepsilon}{54}}(a_n)$ ト $S_{\frac{\varepsilon}{54}}(a_m)$ トノキヨリハ $\frac{\varepsilon}{54}$ ヨリ常ニ大トナリ 3ガナリタッテヰル)

逆ニ $\mathcal{L}(\mathfrak{N})$ ガ 1-4 ヲミタシテヰルトスルト $\mathfrak{N} > \{S_\varepsilon(a)\}$ ナル ε ガアル

($\mathfrak{N}$ モ 1-4 ヲミタシテヰル)

$\because$ シカラズトスルト 1ニ云フ n_1, n_2, n_3 ヲ作ルト 任意ノ $\frac{1}{n}$ ニ對シ $S_{\frac{1}{n}}(a_n) \not\subset N \ (\forall N \in n)$ ナル a_n ヲ對應サセ、点列 $\{a_n\}$ ヲ作リ得ル。

モノコノ $\{a_n\}$ カラ n_1 ノアル element N_1 ノ中デ residual ナ部分点列 $\{a_{n_p}\}$ ヲヌキタセクトスルト

$$S(N_1, n_1) \subset N \ (\in N n) \text{ トスルト}$$

$S_{\frac{1}{n_p}}(a_{n_p}) \wedge N^c \neq \phi$ ナル故 N^c ト N_1 トハ U－分リデナイ。コレハ 2ニ反ス。

故ニ $\{a_{n_p}\}$ ノ如キモノハヌキダセナイ。

(1) $S(a_1\ n_2) \wedge S(a_{n_p}\ n_2) \neq \phi$ ナル如キ a_{n_p} ハ有限コシカナイ

$\because$ 無限ニアルトスルト.

$a_n \in S(S(a_1, n_2), n_2) \subset N_1 \ (\in n_1)$ ナル故イケナイ.

(1) ヲ満足セヌ点ヲーツトリ $a_{n_2}\ (a_1 = a_{n_1})$ トスル.

(1) ヲ満足セヌ点ノウチテ

(2) $S(a_{n_2}, n_2) \wedge S(a_{n_p}\ n_2) \neq \phi$ ナル a_{n_p} ハ有限コシカナイ (2) ヲ満足セヌモノヲ改メテ a_{n_3} トスル。

コノヨウニシテ $a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_p}, \cdots$ ナル $\{a_n\}$ ノ部分点列ヲヌキダスト $S(a_{n_p}, n_2) \wedge S(a_{n_q}, n_2) = \phi, \ (p \neq q)$

コレハ 3 ノ條件ヲミタシテヰル。コノ $\{a_{n_0}\}$ ヲ改メテ $\{a_n\}$ トシルス.

(a_n ハ ε_n ($\varepsilon_n \to 0$) ニ對應スル点デアル)

故ニ $\{a_n\}$ ハ n_3 ニ對シ 3.4 ガナリタツ筈デアル.

(S) $S_{\varepsilon_n}(a_n) \wedge S(a_m, n_3) = \phi \left(\begin{smallmatrix} n \neq n_0 \\ \forall m \end{smallmatrix}\right)$ ナル n_d ガアル.

$\because$ シカラズトスルト.

$S_{\varepsilon_{n_1}}(a_{n_1}) \wedge S(a_{n_2}, n_3) \neq \phi$ トスルト $n_1, n_2 < n_3$ デ $S_{\varepsilon_{n_3}}(a_{n_3})$ ガ(S)ヲミタス相手ガ a_{d_1} カ a_{d_2} ノミナレバ、タトヘバ無数ニ多クノ n_α ガ a_{n_α} ト(S)ヲミタストスルト $S(a_{n_1}, n_3)$ ト $\bigcup_p S(a_{n_p}, n_3)$ トハ U－分リデナイカラ 3ニ反スル.

故ニ n_3, n_4 (何レモ n_1, n_2 ト異ル) ガ (S) ヲミタストスル.

同様ニシテ互ニ異ル $a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots a_{n_p} \cdots$ ヲトリ.

$S_{n_{2p-1}}(a_{n_{2p-1}}) \wedge S_{n_{2p}}(a_{n_{2p}}, n_3) \neq \phi$ トナシ得ル.

故ニ $\{a_{n_{2p}}\}$ ト $\{a_{n_{2p-1}}\}$ ヲトレバ. コレハ3ニ反スルノデ不合理
故ニ (S) ノ如キ n_0 ガアル

$$S_{\varepsilon_n}(a_n) \frown S(a_m, \mathcal{E}_3) = \phi \quad (m \geqq n_0,\ n \neq m)$$

シカルニ a_n ノ作リ方ヨリ $S_{\varepsilon_n}(a_n) \frown S^c(a_n, \mathcal{E}_3) \neq \phi$
故ニ $S_{\varepsilon_n}(a_n) \frown (\frown S^c(a_m, \mathcal{E}_3)) \neq \phi,\ (n \geqq n_0)$
故ニ $\{a_n\}$ ト $\frown S^c(a_m, \mathcal{E}_3)$ トハ U一分リデナイ. コレハ4ニ反ス. 故ニ $\{S_\varepsilon(a)\} < \mathcal{E}$ ナル $\varepsilon > 0$ ガ存在シ $\mathcal{E}$ ハ R ニオケル一様ニコクデアル.

定理III ノ証明終

定理 IV

Complete + *metric space* デハ R_1 ト R_2 ガ一様同相ナル為ノ必要条件ハソノ有界一様連続函数ノ作ル位相環 $U(R_1)$, $U(R_2)$ ガ位相同型ナコトデアル.

Proof. 必要ハ明カ.

$U(R)$ ノ *max ideal* ノウチ單項 *ideal* ノミ考ヘル (*ideal* トハ *closed* ノモノノミヲ云フコトニスル)

一点 a デ 0 ニナル有界 *u. fun.* スベテノ集リ $I(a)$ ハ單項 *max. ideal* デアル.

max. ideal ナコトハ明カダガ單項ナコトハ.

$I(a) \ni f(x) = \rho(a, x)$ ダガ. $I(a)$ ハ f デ生成サレル.

任意ノ $g(x) \in I(a)$ ニ對シ次ノ如キ $g_n(x)$ $(n = 1, 2, 3 \cdots\cdots)$ ヲツクル.

$N_n = \{x \mid f(x) \leqq \frac{1}{n}\}$ トスル.

$$g_n(x) = g(x), \quad (\rho(x, N_n) \geqq \tfrac{1}{n})$$
$$g_n(x) = n\rho(x, N_n)g(x), \quad (0 < \rho(x, N_n) \leqq \tfrac{1}{n})$$
$$g_n(x) = 0 \qquad (x \in N_n)$$

スルト $g_n(x)$ ハ有界 *u. cont.* デアル.

$\rho(y, N_n) \geqq \frac{1}{n},\quad 0 < \rho(x, N_n) \leqq \frac{1}{n},\quad \rho(x, y) < \varepsilon$ ナラバ
$|g(x) - g(y)| < \delta$ トスルト.

$$\frac{1}{n} \geqq \rho(x, N_n) \geqq \frac{1}{n} - \varepsilon \text{ ナル故}$$

$|n\rho(x, N_n)g(x) - g(x)| = |n\rho(x, N_n) - 1||g(x)| < n \cdot \varepsilon \cdot A$ ($|g| < A$ トスル),

$\therefore |g_n(x)-g_n(y)| \leqq |g_n(x)-g(x)|+|g(x)-g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ + ル・ε・A

他ノ場合ハ明カデ $g_n(x)$ ノ $\underset{(局所)}{\text{u. cont.}}$ ナコトガワカル.

$\therefore \quad g_n(x) \in I(a)$

ココデ $h_n(x) = \dfrac{g_n(x)}{f(x)} \quad (x \notin N_n)$

$= 0 \qquad (x \in N_n)$ トスルト $h_n \in U(R)$

デ $\qquad g_n = h_n f.$

ソシテ $g_n \to g$ トナル.

(∵) 任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シ

$\rho(x, a) \leqq \frac{1}{n}$ ナラ $|g(x)| < \varepsilon$ トスルト ($g(a)=0$ ダカラ)

$x \in N_n$ ナラ $|g(x)-g_n(x)| = |g(x)| < \varepsilon$

$0 < \rho(x, N_n) \leqq \frac{1}{n}$ ナラ $|g(x)-g_n(x)| = |g(x)|\,|n\rho(x, N_n)-1|$

$\leqq |g(x)| < \varepsilon$

$\rho(x, N_n) \geqq \frac{1}{n}$ ナラ $g_n(x) = g(x)$

即チ $g_n \to g \qquad$ 故ニ $I(a)$ ハ f デ生成サレル.

逆ニ單項 max. ideal (closed) カアルト. ソレハ $I(a)$ ノ形ニナル.

I ガ f カラ生成サレルトスルトアル点列 $\{a_p\}$ ノ上デ $f \to 0$ (シカラザレバ $I =$ $U(R)$ トナル) 任意ノ $g \in I$ ヲトルト $g_n f \to g$. コレカラ $g \to 0$ ($\{a_p\}$ ノ上デ) ナコトガイヘル.

(∵) $g_n f$ ハ何レモ $\{a_p\}$ ノ上デ $\to 0$

任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對ノ $\exists n_0 : |g_{n_0} f - g| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$

$|g_{n_0} f(a_p)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (p \geqq p_0)$ トスルト

$p \geqq p_0$ ナラ $|g(a_p)| = |g(a_p) - g_{n_0} f(a_p) + g_{n_0} f(a_p)|$

$\leqq |g(a_p) - g_{n_0} f(a_p)| + |g_{n_0} f(a_p)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

即チ g モ $\{a_p\}$ ノ上デ $\to 0$

$\{a_n\}$ カラ Cauchy sequence ガヌキダセタラ

R ハ Complete ナル故 a ニ收斂シ. 從ツテ I ノ fun. ハ何レモ a デ 0 トナル即チ $I = I(a)$

モシヌキダセナイトキニハ $\{a_n\}$ ノ中カラ U-分リナル2ツノ部分列 $\{b_p\}$ ト $\{c_q\}$ ヲエラベル.

$\{b_p\}$ ノ上デ → 0ナル有界 U. cont. fun スベテノ集リハ ideal ヲナスガ
コレヲ $I\{b_p\}$ トアラワスト $I \subset I\{b_p\}$
ス $\{b_p\}$ デ 0, $\{c_q\}$ デ 1ナル有界. U fun. f ヲツクルト $f \notin I$
$f \in I\{b_p\}$ ナル故 $I \neq I\{b_p\}$ デ I ノ max ナコトニ反ス.
故ニ $I = I(a)$ ナル形デアル.
ソコデ單項 max. ideal (closed) ノナス set ヲ $\mathfrak{M}(R)$ デアラワスト
R ト $\mathfrak{M}(R)$ ノ間ニ一対一ノ対応ガツク.
$\mathfrak{M}(R)$ ＝位相. 一様位相ヲ定理III ト同様ニ入レ得テ R ト $\mathfrak{M}(R)$ トガ一様同相ニナル.

(終) 1948. 10. 7

(附録)

連続函数ノナス環 $C(R)$ ニ次ノ如ク位相ヲ入レル.

$A \subset C(R)$

$f \in \bar{A}$ トハ R ノ任意ノ有限個ノ点 $a_1 \cdots\cdots a_n$ ニ対シ. $g \in A$. $f(a_i) = g(a_i)$. $(i = 1 \cdots n)$
ナル g ガ存在スルコトデアルトスル. スルト $C(R)$ ハ位相環ニナル.

$\bar{\phi} = \phi$

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ ハ $\supset$ ハ明カ.
$\subset$ ハ: $f \notin \bar{A} \cup \bar{B}$ ナラバ.
$\exists\, a_1, \cdots\cdots, a_n \mid \forall g (\in A) \cdot \exists\, a_i : f(a_i) \neq g(a_i)$
$\exists\, b_1, \cdots\cdots b_m \mid \forall h (\in B), \exists\, b_j : f(b_j) \neq h(b_j)$
$\{a_1, \cdots\cdots, a_n, b_1 \cdots, b_m\}$ ヲ考ヘルト コノ上デ f ト一致スル函数ハ $A \cup B$ ノ中ニハナイ. 即チ $f \notin \overline{A \cup B}$. $\therefore\ \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$\bar{A} \supset A$ ハ明カ.
$\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ ハ $f \in \bar{\bar{A}}$ トスルト. 任イノ $a_1, \cdots, a_n \in R$ ニ対ノ
$\exists\, g \mid g \in \bar{A}$. $g(a_i) = f(a_i)$ $(i = 1 \cdots n)$
コノ g ニ対シ $h \in A$; $h(a_i) = g(a_i)$ $(i = 1 \cdots n)$ ナル h ガ存在スル.
$\therefore\ h(a_i) = f(a_i)$ $(i = 1 \cdots n)$, $\therefore\ f \in \bar{A}$ 即チ $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$

$\bar{f} = f$ モ明カ.
積ト差ガ連続的ナコトハ

例ヘバ積ニツイテ $fg = h$ トスルト，

h ノ任意ノ nbd $\mho(h)$ トスルト，$h \notin \overline{\mho^c(h)}$ ナル故，

$$\exists a_1, \cdots, a_n \mid \forall \varphi (\in \mho(h)) \quad \exists a_i : h(a_i) \neq \varphi(a_i)$$

故ニ $h(a_i) = \varphi(a_i) \ (i = 1 \cdots n)$ ナラバ $\varphi \in \mho(h)$

$$\mho(f) = \{\varphi \mid \varphi(a_i) = f(a_i) \ (i = \cdots n)\}$$

$$\mho(g) = \{\varphi \mid \varphi(a_i) = g(a_i), \ (i = 1 \cdots n)\}$$ トスルト

$\mho(f)$. $\mho(g)$ ハ各々 f, g ノ nbd ニナル.

$\varphi \in \mho(f)$, $\varphi \in \mho(g)$ ナラバ $\varphi \cdot \psi \in \mho(h)$

$$\because \varphi \psi (a_i) = f(a_i) \cdot g(a_i) = h(a_i) \quad (i = \cdots n)$$

スルト $C(R)$ ニオイテ max. ideal デ closed ナモノヲ考ヘルト コレハ $I(a) = \{f \mid f(a) = 0\}$ ナル形ノ ideal ト一致スル.

任意ノ $I(a)$ ヲ考ヘルト max ナコトハ明カダガ，closed ナコトハ $f \in \overline{I(a)}$ ナラ $\exists g \in I(a) \mid f(a) = g(a)$

$$g(a) = 0 \quad \therefore f(a) = 0 \quad \therefore f \in I(a)$$

逆ニ closed ナ max ideal I ガアルト

$L_s(R)$ 等ヲ考ヘタ時ト同様ニ I ノ函数ガスベテソノ上デ $\to 0$ トナル有向点集合 $\varphi(\chi \mid \mathfrak{X})$ ガアル cluster pt a ヲモテバ $I \subset I(a)$ $\therefore I = I(a)$

モタヌトスルト 任イノ $a \in R$ ニ対シ $\varphi(\chi \mid \mathfrak{X})$ ガ $\mho^c(a)$ ノ中デ residual ナル如キ a ノ nbd $\mho(a)$ カアル $\mho(a)$ ニ含マレルスベテノ a ノ nbd $\mho_\alpha(a)$ ヲ考ヘル. コノ $\mho_\alpha(a)$ ニ對シ

$$\left.\begin{aligned} & f_{\mho_\alpha(a)}(a) = 1 \\ & f_{\mho_\alpha(a)}(b) = 0, \ (b \in \mho_\alpha^c(a)) \end{aligned}\right\}$$ ナル連続函数 $f_{\mho_\alpha(a)}$ ヲツクルト

I ガ max. ナコトカラ $\varphi_{\mho_\alpha(a)} \in I$, $(\forall \mho_\alpha(a))$

$$\therefore 1 \in \bar{I} = I. \quad \therefore I = C(R)$$ コレハ不合理

故ニスベテノ closed ナ max ideal ノ集合 $\mathfrak{L}(R)$ ト R ノ間ニハ一対一ノ対應ガツク $\mathfrak{L}_s(R)$ ノ場合ト同様ニ位相ヲ入レルト. コノ対應ハ同相ニナル. 一様位相ヲ考エルニハ有界一様連続函数ノ作ル位相環 $\mho(R)$ ヲ考ヘルトヨイ. 故ニ.

定理　C. R. 空間（一様位相空間）R_1 ト R_2 ガ同相（一様同相）ナルタメノ
全自帯又ハ metrix

必充條件ハ上ノ$C(R_1)$ト$C(R_2)$ ($\overline{U}(R_1)$ト$\overline{U}(R_2)$) ガ位相同型ナコトデアル.

(終)