126. 連續正則環ノ埋藏定理

廣島文理大　前田文友（1948. 11. 19）

連續正則環 R トハソノ主右イデヤル束 $\overline{R}_R$ ガ連續構造束即チ連續幾何學ニナツテ居ル環デアル。シカルニ連續幾何學ニ對シテハ岩村氏（本誌254号（昭18）日本數學輯報19（昭19））及ビ河田・松島・樋口三氏（本誌264号（昭19））ノ埋藏定理ガアル。連續補模束 L ノ中心 Z ノ極大イデヤル $\mathfrak{J}$ ノ全体ヨリナル Z ノ表現ブール空間ヲ Ω トスル。岩村氏ハ L ノ各 a ノ次元トシテ Ω ニ於テ定義セラレタ連續函數 $D(a)=\delta(a,\mathfrak{J})$ ヲ導入シタ。河田氏等ハ L ノ極大中立イデヤル J ト Z ノ極大イデヤル $\mathfrak{J}$ トハ一對一ノ對應ヲナシ（從ツテ J ノ全体モ Ω デアラハス）、L ハ既約連續補模束 L/J ノ積 $\Pi(L/J;\ J\in\Omega)$ ニ埋藏サレルコトヲ示シタ。本誌ニ於テハ連續正則環 R ノ極大兩側イデヤル $\mathfrak{a}$ ト $\overline{R}_R$ ノ極大中立イデヤル J トガ一對一ノ對應ヲナシ（從ツテ $\mathfrak{a}$ ノ全体モ Ω デアラハス）R ハ既約連續正則環 $R/\mathfrak{a}$ ノ積 $\Pi(R/\mathfrak{a};\ \mathfrak{a}\in\Omega)$ ニ埋藏サレルコトヲ示ス。

（以下 J. v. Neumann 連續幾何學講義 I. II. III ハ V. Neumann I. II. III ト略称スル）

§1. 本節ニ於テハ L ハ連續補模束トスル。

<u>定理 1.1</u>　L ノ各元 a ニ對シテ、次ノ性質ヲモツ Ω ニ於テノ連續函數 $\delta(a,\mathfrak{J})$ ガ存在スル。

(1°)　$0\leqq\delta(a,\mathfrak{J})\leqq 1$.　$\delta(0,\mathfrak{J})=0$.　$\delta(1,\mathfrak{J})=1$.

(2°)　L ノ中心 Z ニ對シテ、$z\in\mathfrak{J}$ ナラバ $\delta(z,\mathfrak{J})=0$　$z\notin\mathfrak{J}$ ナラバ $\delta(z,\mathfrak{J})=1$

(3°)　$\delta(a\cup b,\mathfrak{J})+\delta(a\cap b,\mathfrak{J})=\delta(a,\mathfrak{J})+\delta(b,\mathfrak{J})$

(4°)　$a>0$ ナラバ $\delta(a,\mathfrak{J})>0$ ナル $\mathfrak{J}$ ガ存在スル。

コノ定理ハ岩村氏前掲論文ニヨツテ証明サレタ。尚河田氏等談話140号定理3ノ証明モ本質的ニハ、コノ $\delta(a,\mathfrak{J})$ ノ存在ノ証明ニ外ナラナイ。河田氏等ノ方法ガ値ノ決定シタ方ガ具体的デアル。$\delta(a,\mathfrak{J})$ ノ性質トシテハ (1°)—(4°) 以外ニモ重要ナモノガアルガ、後ニ必要ナモノノミヲ掲ゲタ。

補題1.1　Lノ各元aニ実数値$m(a)$ガ定義セラレ,

(α)　$0 \leqq m(a) \leqq 1$.　$m(0)=0$,　$m(1)=1$,

(β)　Lノ中心元zニ對シテハ $m(z)=0$ 又ハ1.

(γ)　$m(a \cup b)+m(a \cap b)=m(a)+m(b)$

ナルトキ, $\mathfrak{z}=(z;\ m(z)=0,\ z \in Z)$, $J=(a;\ m(a)=0)$ トオケバ, $\mathfrak{z}$ハ中心Zノ極大いでやるニシテ, JハLノ極大中立いでやるデアル. 尚 $a \in J$ナルタメノ必要ニシテ充分ナル條件ハ, $n=1,2,\cdots$ ニ對シテ $e_n \in \mathfrak{z}$ ナルコトデアル.

コノ補題ハ河田氏等談話138頁補題3ト同一デアル. e_n ニツイテハ同談話P136(2)ニ定義セラレテイル.

定理1.2　JヲLノ極大中立いでやるトシ $\mathfrak{z}$ヲLノ中心Zノ極大いでやるトスル.

(1°)　$\mathfrak{z}(J)=(z;\ z \in J,\ z \in Z)$ ハZノ極大いでやるデアル.

(2°)　$J(\mathfrak{z})=(a;\ \delta(a,\mathfrak{z})=0)$　ハLノ極大中立いでやるデアル.

(3°)　$\mathfrak{z}(J(\mathfrak{z}))=\mathfrak{z}$　$J(\mathfrak{z}(J))=J$.

〔証〕 (i) $\mathfrak{z}(J)$ハZノいでやるデ1ヲ含マナイコトハ明ラカデアル. モシ$\mathfrak{z}(J)$ガZノ極大いでやるデナイトスレバ, $\mathfrak{z}(J)<\mathfrak{q}<Z$ ナルガ如キZノいでやる$\mathfrak{q}$ガ存在スル. $\mathfrak{q}$ニ含マレタアル一ツノ中心元zニヨッテ $a \leqq z$ ナルガ如キLノ元aノ全体ヲ$I(\mathfrak{q})$トスレバ, $I(\mathfrak{q})$ハLノ中立いでやるデアル $I(\mathfrak{q})$ハ1ヲ含マヌ, 又Jニ含マレナイ中心元ヲ含ムカラ $J<I(\mathfrak{q})<L$. コレJガLノ極大中立いでやるデアルコトニ矛盾スル. 故ニ$\mathfrak{z}(J)$ハZノ極大いでやるデアル.

(ii) $\mathfrak{z}$ヲ固定スレバ $\delta(a,\mathfrak{z})$ハ補題1.1ノ(α),(β)(γ)ヲ満足スルカラ $J(\mathfrak{z})$ハLノ極大中立いでやるデアル.

(iii)　$z \in \mathfrak{z} \rightleftarrows \delta(z,\mathfrak{z})=0 \rightleftarrows z \in J(\mathfrak{z}) \rightleftarrows z \in \mathfrak{z}(J(\mathfrak{z}))$

ナル故　$\mathfrak{z}=\mathfrak{z}(J(\mathfrak{z}))$ デアル.

(iv)　(i),(ii)ヨリ$J(\mathfrak{z}(J))$ハLノ極大中立いでやるデアル. $J \neq J(\mathfrak{z}(J))$トスレバ, 補題1.1ヨリアル $a \in J$ニ對シテ $e_n \notin \mathfrak{z}(J)$ ナルガ如キnガアル.

$$e_n f = n e_n' A a + C_n, \qquad C_n \ll e_n A a$$

ヨリ $a \in J$ ナルトキハ $C_n \subset J$ トナッテ $e_n\, \mathfrak{z}(J)$ ニ矛盾スル. 故ニ

$$J = J(\mathfrak{z}(J))$$ デアル.

〔注意1.1〕 コノ定理ハ河田氏等紙結定理2ト同一デアル。同所ニ於テハ $J(\mathfrak{z}) = (a;\, e_n' \in \mathfrak{z},\ n = 1, 2, \ldots\ldots)$ ト定義シテアルガ、補題1.1ヨリ上ノ(2°)ト一致スル. $\delta(a, \mathfrak{z})$ ヲ用イタカラ證明ガ幾分簡單ニナツタ.

補題1.2 L ノ各元 a ニ對シテ $\mathfrak{z}$ ニ於ケル函数 $f_a(\mathfrak{z})$ ガ定義セラレ.

(1°) $0 \leqq f_a(\mathfrak{z}) \leqq 1$. $f_0(\mathfrak{z}) = 0$. $f_1(\mathfrak{z}) = 1$.

(2°) L ノ中心元 z ニ對シテ. $z \in \mathfrak{z}$ ナラバ $f_z(\mathfrak{z}) = 0$. $z \notin \mathfrak{z}$ ナラバ $f_z(\mathfrak{z}) = 1$

(3°) $f_{a \cup b}(\mathfrak{z}) + f_{a \cap b}(\mathfrak{z}) = f_a(\mathfrak{z}) + f_b(\mathfrak{z})$

ナル條件ヲ充タスナラバ. $f_a(\mathfrak{z})$ ハ一意的ニ定マリ. $f_a(\mathfrak{z}) = \delta(a, \mathfrak{z})$ デアル.

(證) (i) 一ツノ $\mathfrak{z}$ ヲトレバ $\mathfrak{z} = (z;\, f_z(\mathfrak{z}) = 0) = (z : \delta(z, \mathfrak{z}) = 0)$ デアルカラ補題1.1ヨリ $f_a(\mathfrak{z}) = 0$. 及ビ $\delta(a, \mathfrak{z}) = 0$ ナルタメノ必要ニ於テ充分ナル條件ハ何レモ $e_n \in \mathfrak{z}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ デアル. 從ッテ $f_a(\mathfrak{z}) = 0$ ト $\delta(a, \mathfrak{z}) = 0$ トハ同義デアル.

(ii) L ノ極大中立いでやる J ニ對シテ $a \equiv b\ (J)$ ナラバ. $a \cup b = (a \cap b) \cup d$, $(a \cap b) \cap d = 0$ トスレバ $d \in J$. 從ッテ定理1.2ヨリ $\delta(d, \mathfrak{z}(J)) = 0$ 故ニ (i)ヨリ $f_d(\mathfrak{z}(J)) = 0$ 從ッテ $f_{a \cup b}(\mathfrak{z}(J)) = f_{a \cap b}(\mathfrak{z}(J))$ デアルカラ

$f_a(\mathfrak{z}(J)) = f_b(\mathfrak{z}(J))$

(iii) (ii)ニヨリ $m(a/J) = f_a(\mathfrak{z}(J))$ ト定義スルコトガ出來ル. シカルトキハ $m(0/J) = 0$ $m(1/J) = 1$ デアルカラ. 既約連續幾何學束 L/J ニ對シテ v. Neumann I. Theorem 7.4・Cor 1.ヲ適用スレバ $m(a/J) = \delta(a, \mathfrak{z}(J))$.

コレハスベテノ J ニ対シテ成立スルカラ $f_a(\mathfrak{z}) = \delta(a, \mathfrak{z})$ デアル.

(本補題ニツイテハ佐々木右左ニヨリ有力ナ助言ヲ与エラレタ)

補題1.3 $a^* \in L$ ナルトキ $L^* = L(0, a^*)$ ヲ中心ハ $Z^* = (z \cap a^*, z \in Z)$ デアル (v. Neumann III Theorem 1.6) コノトキ $e(a^*)$ ヲ含マナイ Z ノ極大いでやる $\mathfrak{z}$ ト Z^* ノ極大いでやる $\mathfrak{z}^*$ トノ間ニハ

$$\mathfrak{z} \to \mathfrak{z}^* = (z\cap a^*;\ z\in\mathfrak{z}),\quad \mathfrak{z}^* \to \mathfrak{z} = (z;\ z\cap a^*\in\mathfrak{z}^*)$$

ナル関係ニヨッテ一對一ノ対応ガ存在スル.

(證) 容

補題1.4 $a\in L^* = L(0,a^*)$ ナルトキ L ノ元トシテノ a ノ次元 $D(a)=\delta(a,\mathfrak{z})$ ト L^* ノ元トシテノ a ノ次元 $D^*(a)=\delta^*(a,\mathfrak{z}^*)$ トノ間ニハ次ノ関係ガアル.

$$\delta^*(a,\mathfrak{z}^*) = \frac{\delta(a,\mathfrak{z})}{\delta(a^*,\mathfrak{z})}.\qquad (e(a^*)\notin\mathfrak{z})$$

但シ, $\mathfrak{z}$ ト $\mathfrak{z}^*$ トハ補題1.3ニヨッテ相対応スルモノデアル.

(證)
$$f_a(\mathfrak{z}^*) = \frac{\delta(a,\mathfrak{z})}{\delta(a^*,\mathfrak{z})}$$

トオケバ $f_a(\mathfrak{z}^*)$ ハ L^* ニ於テ補題1.2ノ(1°),(3°)ヲ充タスコトハ明ラカデアル. 次ニ L^* ノ中心元 $z^* = z\cap a^*$ ニ對シテ

$$f_{z^*}(\mathfrak{z}^*) = \frac{\delta(z\cap a^*,\mathfrak{z})}{\delta(a^*,\mathfrak{z})} = \frac{\delta(z,\mathfrak{z})\cap\delta(a^*,\mathfrak{z})}{\delta(a^*,\mathfrak{z})}$$

故ニ $z^*\in\mathfrak{z}^*$ ナラバ $z\in\mathfrak{z}$ デアルカラ $\delta(z,\mathfrak{z})=0$ 即チ $f_{z^*}(\mathfrak{z}^*)=0$
又 $z^*\notin\mathfrak{z}^*$ ナラバ $z\notin\mathfrak{z}$ デアルカラ $\delta(z,\mathfrak{z})=1$ 即チ $\delta_{z^*}(\mathfrak{z}^*)=1$.
従ッテ補題1.2ノ(2°)ガ成立スル. 故ニ $f_a(\mathfrak{z}^*)=\delta^*(a,\mathfrak{z}^*)$ デアル.

(定理1.2) 補題1.3ヨリ $\mathfrak{z}^*\longleftrightarrow\mathfrak{z}$ デアルカラ $\delta^*(a,\mathfrak{z}^*)$ ヲ $\delta^*(a,\mathfrak{z})$ トカイテ差支エナイ.

§2 正則環 R ノ核心 $\mathfrak{z}$ ニ属スル冪等元ノ全体 $\mathfrak{z}_e$ ハぶーる環デアリ $\eta\to(\eta)^r$ ナル対応ニヨッテ $\mathfrak{z}_e$ ハ $\bar{R}_R$ ノ中心 Z_R ト束同型デアル. シカルニ連続正則環 R ニ於テハ Z_R ハ完備ぶーる束デアルカラ $\mathfrak{z}_e$ モソウデアル. 又 $\eta\leftrightarrow(\eta)^r$ ナル対応ニヨッテ $\mathfrak{z}_e$ ノ極大いでやるト Z_R ノ極大いでやるトハ一對一ノ対応ヲナスカラ, コレヲ同一ノ文字 $\mathfrak{z}$ デアラワス.

連続正則環 R ノ主右いでやる束 $\bar{R}_R$ 及ビ主左いでやる束 $\bar{L}_R$ ハ連続補元束デアルカラ, $(\alpha)_r\in\bar{R}_R$ ニ對シテ次元函数 $D((\alpha)_r)$ $(\alpha)_l\in\bar{L}_R$ ニ對シテ次元函数 $D'((\alpha)_l)$ ガ定義サレル. コレ等ハ何レモ中心 Z_R ノ極大いでやる $\mathfrak{z}$ 即チ $\mathfrak{z}_e$ ノ極大いでやる $\mathfrak{z}$ ノ連続函数デアル.

以下 R ハ連続正則環トスル.

<u>定義2.1</u> R ノ元 α ニ對シテ $\alpha=\alpha\eta=\eta\alpha$ ヲ滿足スル最小ノ $\mathfrak{Z}_e$ ノ元 η ヲ α ノ核心包トイイ. $\eta(\alpha)$ デアラワス.

<u>補題2.1</u> $\overline{R}_R$ ニ於テ

(i) $e((\alpha)_r)=(\eta(\alpha))_{\ast}$.

(ii) $(\alpha)_r\sim(\beta)_r$ ナラバ. $\eta(\alpha)=\eta(\beta)$

(iii) $(\alpha)_r$ ト $(\beta)_r$ トノ間ニ因子対應ガアルナラバ $\eta(\alpha)=\eta(\beta)$

($\overline{L}_R$ ニ於テモ同様ニ成立スル. コレヲ補題2.1´デアラワス 以下同様)

(証) (i) $(\alpha)_r\leqq(\eta)_{\ast}$ ト $\alpha=\alpha\eta=\eta\alpha$ トハ同義デアルコトガ明カデアル.

(ii) $e((\alpha)_r)=e((\beta)_r)$ デアルカラ (i) ヨリ成立スル.

(iii) ϕ ψ ヲ特殊因子トシ $\psi\phi=\varepsilon$ トオケバ v. Neumann II Lemma 15.2 ヨリ $(\alpha)_r=(\varepsilon)_r$, $(\beta)_r=(\phi)_r$ ノ $\psi\cdot\varepsilon=\phi$ デアル $\psi\phi=\varepsilon$, $\phi\varepsilon=\phi$ ヨリ $(\varepsilon)_l=(\phi)_l$ デアル.

シカルトキハ (i). (i´) ヨリ $\eta(\alpha)=\eta(\varepsilon)$, $\eta(\beta)=\eta(\phi)$, $\eta(\varepsilon)=\eta(\phi)$ ナル故 $\eta(\alpha)=\eta(\beta)$ デアル.

<u>補題2.2</u> $\overline{R}_R$ ノ部分束 $L((0),(\alpha)_r)$ ノ中心ハ $((\eta\alpha)_r;\eta\in\mathfrak{Z}_e)$ デアル.

(証) v. Neumann III Theorem 1.6. ヨリ $L((0),(\alpha)_r)$ ノ中心ハ $((\eta)_r\frown(\alpha)_r;\eta\in\mathfrak{Z}_e)$ ニシテ $(\eta)_r\frown(\alpha)_r=(\eta\alpha)_r$ デアル.

<u>補題2.3</u> $\overline{R}_R$ ノ二元 $\mathfrak{a}$ ト $\mathfrak{b}$ トノ間ニ因子対應ガ存在スルトキハ $D(\mathfrak{a})=D(\mathfrak{b})$ デアル.

(証) (i) 補題2.1 (iii) ノ証明ノ如ク $\mathfrak{a}=(\varepsilon)_r$, $\mathfrak{b}=(\phi)_r$; $(\varepsilon)_l=(\phi)_l$ ナルガ如キ ε, ϕ ガ存在シ. ϕ ψ ガソノ特殊因子デアル.

v. Neumann II Lemma 15.4 カラ $L((0),(\varepsilon)_r)$ ト $L((0),(\phi)_r)$ トノ束同型対應ガ存在スル 補題2.2 ヨリ $L((0),(\varepsilon)_r)$ ノ任意 中心元ハ $(\eta\varepsilon)_r$ $(\eta\in\mathfrak{Z}_e)$ デアラワサレ コレニ対應スル $L((0)\ (\phi)_r)$ ノ中心元ハ $(\phi\eta\varepsilon)_r=(\eta\phi\varepsilon)_r=(\eta\phi)_r$ デアル.

(ii) $L^{\ast}=L((0).\mathfrak{a})$ ハ連続補格束デアルカラ. $L^{\ast}$ ニ於ケル $\mathfrak{a}_0\leqq\mathfrak{a}$ ノ次元ハ補題1.4及ビ注意1.2カラ $\dfrac{\delta(\mathfrak{a}_0,\mathfrak{z})}{\delta(\mathfrak{a},\mathfrak{z})}$ デアル. 但シ $\mathfrak{z}$ ハ $e(\mathfrak{a})$ ヲ含マナイ.

Z_R ノ極大イデヤルデアルガ. 補題2.1 (i) カラ $\mathfrak{z}$ ハ $\eta(\varepsilon)$ ヲ含マナイ $\mathfrak{Z}_e$ ノ極大イデヤルト考エテヨイ.

(iii) $L^{**}=A((0),\mathfrak{b})$ ハ L^* ト同型デアルカラ, $\mathfrak{t}_0\leqq\mathfrak{t}$ ヲ $\mathfrak{a}_0$ ニ對應スル主右イデヤルトスレバ, $\mathfrak{t}_0$ ノ L^{**} ニ於ケル次元ハ $\mathfrak{a}_0$ ノ L^* ニ於ケル次元ニ対応スルワケデアルガ. (i) ニヨリ L^* ト L^{**} トノ束同型対応ニ於テ相対応スル中心元ハ同一ノ $\eta\in\mathfrak{Z}_\varepsilon$ デアラワサレ、補題2.1 (iii) ヨリ $\eta(\varepsilon)=\eta(\varphi)$ デアルカラ (ii) ヨリ

$$\frac{\delta(\mathfrak{a}_0,\mathfrak{z})}{\delta(\mathfrak{a},\mathfrak{z})}=\frac{\delta(\mathfrak{t}_0,\mathfrak{z})}{\delta(\mathfrak{t},\mathfrak{z})}\qquad(\eta(\varepsilon)\notin\mathfrak{z})$$

デアル。故ニ $\delta(\mathfrak{t}_0,\mathfrak{z})=C\delta(\mathfrak{a}_0,\mathfrak{z})$. 即チ $D(\mathfrak{t}_0)=CD(\mathfrak{a}_0)$ ナルガ如キ常数Cガ存在スル.

(iv) $\mathfrak{a}=\mathfrak{t}$ ナルトキハコノ補題ハ明カデアルカラ, $\mathfrak{a}\neq\mathfrak{t}$ トスル 即チ例ヘバ $\mathfrak{a}\neq\mathfrak{t}$ トスレバ $\mathfrak{a}\frown\mathfrak{t}<\mathfrak{a}$ デアルカラ

$$(\mathfrak{a}\frown\mathfrak{t})\smile\mathfrak{a}_0=\mathfrak{a},\qquad(\mathfrak{a}\frown\mathfrak{t})\frown\mathfrak{a}_0=(0)$$

ナル $\mathfrak{a}_0$ ヲトレバ, $\mathfrak{a}_0>(0)$ デアッテ $\mathfrak{a}_0\frown\mathfrak{t}\leqq\mathfrak{a}_0\frown\mathfrak{a}\frown\mathfrak{t}=(0)$ デアル. L^* ト L^{**} トノ間ノ因子束同型対応ニヨッテ $\mathfrak{a}_0$ ニ対応スル L^{**} ノ元ヲ $\mathfrak{t}_0$ トスレバ. $\mathfrak{a}_0\frown\mathfrak{t}_0\leqq\mathfrak{a}_0\frown\mathfrak{t}=(0)$ デアルカラ v. Neumann II Theorem 15.3 (c) ヨリ $\mathfrak{a}_0\sim\mathfrak{t}_0$ デアル. 従ッテ $D(\mathfrak{a}_0)=D(\mathfrak{t}_0)$ 故ニ (iii) ニ於テ $C=1$. 即チ $D(\mathfrak{a})=D(\mathfrak{t})$ デアル.」

<u>補題2.4</u> $D((\alpha)_\nu)=D'((\alpha)e)$

(証) (i) $(\alpha)e=(\beta)\varepsilon$ トスレバ. $\beta=\varphi\alpha$, $\alpha=\psi\beta$ ナルガ如キ $\varphi\ \psi$ ガ存在スル. $\alpha=\psi\varphi\alpha$, $\beta=\varphi\psi\alpha$ デアルカラ $(\alpha)_\nu$ ト $(\beta)_\nu$ トノ間ニハ $\varphi.\psi$ ヲ因子トスル因子対応ガ存在スル. 故ニ補題2.3ヨリ $\delta((\alpha)_\nu,\mathfrak{z})=\delta((\beta)_\nu,\mathfrak{z})$ デアル.

(ii) (i) ヨリ $\overline{L}_R$ ノ元 $(\alpha)\varepsilon$ ニ對シテ Ω ノミデ定義セラレタ函数 $f((\alpha)e;(\mathfrak{z})=f(\alpha)e.\mathfrak{z})$ ヲ

$$f((\alpha)\varepsilon.\mathfrak{z})=\delta((\alpha)_\nu,\mathfrak{z})$$

デ導入スルコトガ出来ル. シカルトキハ $0\leqq f((\alpha)e;\mathfrak{z})\leqq 1$, $f((0),\mathfrak{z})=0$, $f((1)e,\mathfrak{z})=1$ デアル. 又 $\mathfrak{Z}_e$ ノ元 η ニ対シテ $(\eta)_*\in\mathfrak{z}$ ナラバ $f((\eta)_\varepsilon.\mathfrak{z})=0$.

$(\eta)e \neq \mathfrak{z}$ ナラバ $f((\eta)e, \mathfrak{z}) = 1$ デアル.

次ニ任意ノ $(\alpha)e$. $(\beta)e$ ヲトク. $(\partial)e$ 及ビ $(\beta)e$ ニ於ケル $(\alpha)e \wedge (\beta)e$ ノ相對補元ヲ夫々 $(\delta)e$. $(\delta)e$ トスレバ

$$(\alpha)e \vee (\beta)e = ((\alpha)e \wedge (\beta)e) \vee (\gamma)e \vee (\delta)e, \quad ((\alpha)e \wedge (\beta)e, (\gamma)e\ (\delta)e) \perp$$

故ニ $(\alpha)e \wedge (\beta)e = (\varepsilon_1)e$. $(\gamma)e = (\varepsilon_2)e$. $(\delta)e = (\varepsilon_3)e$, $\varepsilon_i \varepsilon_j = 0\ (i \neq j)$ ナルガ如キ冪等元 ε_1. ε_2. ε_3 ガ存在シテ

$$(\alpha)e = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)e, \quad (\beta)e = (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)e, \quad (\alpha)e \vee (\beta)e = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)e$$

デアル. シカルトキハ.

$$\begin{aligned} f((\alpha)e \vee (\beta)e. \mathfrak{z}) &= f((\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)e, \mathfrak{z}) = \delta((\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)v, \mathfrak{z}) \\ &= \delta((\varepsilon_1 + \varepsilon_2)v. \mathfrak{z}) + \delta((\varepsilon_1 + \varepsilon_3)v. \mathfrak{z}) - \delta((\varepsilon_1)v. \mathfrak{z}) \\ &= f((\varepsilon_1 + \varepsilon_2)e, \mathfrak{z}) + f((\varepsilon_1 + \varepsilon_3)e. \mathfrak{z}) - f((\varepsilon_1)e, \mathfrak{z}) \\ &= f((\alpha)e, \mathfrak{z}) + f((\beta)e, \mathfrak{z}) = f((\alpha)e \wedge (\beta)e, \mathfrak{z}). \end{aligned}$$

故ニ補題1.2ヲ $\overline{L_R}$ ニ適用スレバ $f((\alpha)e, \mathfrak{z}) = \delta'((\alpha)e, \mathfrak{z})$. 即チ $\delta((\alpha)v. \mathfrak{z}) = \delta'((\alpha)e, \mathfrak{z})$ デアル.

<u>定義2.2</u> R ノ元 α ニ對シテ階數 $R(\alpha) = \gamma(\alpha, \mathfrak{z})$ ヲ

$$R(\alpha) = D((\alpha)v) = D'((\alpha)e)$$

ニヨツテ定義スル.

R ガ既約ノ場合ハ $R(\alpha)$ ハ実数デアルガ 一般ニハ $R(\alpha)$ ハ $\mathfrak{z}e$ ノ極大いでやる $\mathfrak{z}$ ノ連續函数デアル. シカシ v. Neumann II Theorem 17.1 ノ証明ハコノ場合モソノマヽ適用サレル. 即チ可約連續正則環ノ場合モ形式的ニ既約連續正則環ノ場合ト同樣ナ性質ヲモツ階數ガ定義サレル. ソノ中デ以下必要ナノハ次ノ性質デアル.

<u>定理2.1</u> (1°) $R(\alpha\beta) \leqq R(\alpha), R(\beta)$. (2°) $R(\alpha+\beta) \leqq R(\alpha) + R(\beta)$

§3. <u>定理3.1</u> $\mathfrak{a}$ ヲ R ノ極大両側いでやるトシ, $\mathfrak{J}$ ヲ $\overline{R_R}$ ノ極大中立いでやるトスレバ.

(1°) $\mathfrak{J}(\mathfrak{a}) = ((\alpha)_v\ ; (\alpha)_v \leqq \mathfrak{a})$ ハ $\overline{R_R}$ ノ極大中立いでやるデアル.

(2°) $\mathfrak{a}(\mathfrak{J}) = (\alpha; (\alpha)_v \in \mathfrak{J})$ ハ R ノ極大両側いでやるデアル.

(3°) $\mathfrak{J}(\mathfrak{a}(\mathfrak{J})) = \mathfrak{J}$, $\quad \mathfrak{a}(\mathfrak{J}(\mathfrak{a})) = \mathfrak{a}$.

(証) (i) $\mathfrak{a}$ ヲ $\mathfrak{R}$ ノ任意ノ両側いでやるトスレバ, $J(\mathfrak{a})=((\alpha)_\nu;(\alpha)_\nu\leqq\mathfrak{a})$ ガ $\overline{R}_{\mathfrak{R}}$ ノいでやるナルコトハ明カデアル。今 $(\alpha)_\nu\leqq\mathfrak{a}$, $(\alpha)_\nu\sim(\beta)_\nu$ ナルトキ $(\alpha)_\nu$, $(\beta)_\nu$ ノ共通補元ヲ ι トスレバ

$$(\alpha)_\nu=(\varepsilon)_\nu,\quad \iota=(1-\varepsilon)_\nu=(1-\eta)_\nu\quad (\beta)_\nu=(\eta)_\nu$$

ナルガ如キ冪等元 ε,η ガ存在スル. $(1-\varepsilon)_\nu=(1-\eta)_\nu$ ヨリ $(\varepsilon)\iota=(\eta)\iota$ デアル. シカルトキハ $(\alpha)_\nu\leqq\mathfrak{a}$ ヨリ $\varepsilon,\eta\in\mathfrak{a}$ デアルカラ $(\beta)_\nu\leqq\mathfrak{a}$
故ニ $J(\mathfrak{a})$ ハ $\overline{R}_{\mathfrak{R}}$ ノ中立いでやるデアル.

(ii) J ヲ $\overline{R}_{\mathfrak{R}}$ ノ極大中立いでやるトスレバ, 定理1.2ヨリ $\gamma((\alpha)_\nu,\mathfrak{z}(J))=0$ ト $(\alpha)_\nu\in J$ トハ同義デアルカラ $\mathfrak{a}(J)=(\alpha;\gamma(\alpha,\mathfrak{z}(J))=0)$ デアル.
$\alpha,\beta\in\mathfrak{a}(J)$ ナラバ $(\beta)_\nu=(-\beta)_\nu$ デアルカラ定理3.1(2°)ヨリ

$$\gamma(\alpha-\beta;\mathfrak{z}(J))\leqq\gamma(\alpha;\mathfrak{z}(J))+\gamma(\beta;\mathfrak{z}(J))=0$$

デアルカラ $\alpha-\beta\in\mathfrak{a}(J)$ $\alpha\in\mathfrak{a}(J)$ $\xi\in\mathfrak{R}$ ナラバ定理2.1(1°)ヨリ

$$\gamma(\alpha\xi;\mathfrak{z}(J))\leqq\gamma(\alpha;\mathfrak{z}(J))=0\quad \gamma(\xi\alpha;\mathfrak{z}(J))\leqq\gamma(\alpha;\mathfrak{z}(J))=$$

デアルカラ, $\alpha\xi,\ \xi\alpha\in\mathfrak{a}(J)$. 即チ $\mathfrak{a}(J)$ ハ両側いでやるデアッテ $\mathfrak{a}(J)<\mathfrak{R}$ デアル.

(iii) J ヲ $\overline{R}_{\mathfrak{R}}$ ノ極大中立いでやるトスレバ, (ii)ヨリ $\mathfrak{a}(J)$ ハ $\mathfrak{R}$ ノ両側いでやるデアッテ

$$(\alpha)_\nu\in J\rightleftarrows\alpha\in\mathfrak{a}(J)\rightleftarrows(\alpha)_\nu\leqq\mathfrak{a}(J)\rightleftarrows(\alpha)_\nu\in J(\mathfrak{a}(J))$$

故ニ $\quad J=J(\mathfrak{a}(J))$.

(iv) $\mathfrak{a}$ ガ $\mathfrak{R}$ ノ極大両側いでやるデアルトキ, $J(\mathfrak{a})$ ガ $\overline{R}_{\mathfrak{R}}$ ノ極大中立いでやるデナイトスレバ $J(\mathfrak{a})<I$ ナルガ如キ $\overline{R}_{\mathfrak{R}}$ ノ極大中立いでやる I ガ存在スル.
(ii)ニヨリ $\mathfrak{a}(I)$ ハ $\mathfrak{R}$ ノ両側いでやるデアッテ, $\mathfrak{a}(I)<\mathfrak{R}$ デアル.

$$\alpha\in\mathfrak{a}\to(\alpha)_\nu\leqq\mathfrak{a}\to(\alpha)_\nu\in J(\mathfrak{a})\to(\alpha)_\nu\in I\to\alpha\in\mathfrak{a}(I)$$

デアルカラ $\mathfrak{a}\leqq\mathfrak{a}(I)$. シカルニ $\mathfrak{a}$ ハ極大ナレバ $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}(I)$. 故ニ (iii) ヨリ $J(\mathfrak{a})=J(\mathfrak{a}(I))=I$ トナッテ仮定ニ反スル 従ッテ $J(\mathfrak{a})$ ハ $\overline{R}_{\mathfrak{R}}$ ノ極大中立いでやるデアル.

(v). $\mathfrak{a}$ ヲ $\mathfrak{R}$ ノ極大両側いでやるトスレバ, (iv)ヨリ $J(\mathfrak{a})$ ハ $\overline{R}_{\mathfrak{R}}$ ノ極大中立い

イデアルデアッテ

$$\alpha\in\mathfrak{a}\rightleftarrows(\alpha)_\nu\leqq\mathfrak{a}\rightleftarrows(\alpha)_\nu\in\mathfrak{J}(\mathfrak{a})\rightleftarrows\alpha\in\mathfrak{a}(\mathfrak{J}(\mathfrak{a}))$$

故ニ　$\mathfrak{a}=\mathfrak{a}(\mathfrak{J}(\mathfrak{a}))$.

(VII) $\mathfrak{J}$ ガ $\bar{R}_R$ ノ極大中立イデアルナルトキ, $\mathfrak{a}(\mathfrak{J})$ ガ R ノ極大両側イデアルニデナイトスレバ, $\mathfrak{a}(\mathfrak{J})<\mathfrak{b}$ ナルガ如キ R ノ極大両側イデアル $\mathfrak{b}$ ガ存在スル.

$$(\alpha)_\nu\in\mathfrak{J}\to\alpha\in\mathfrak{a}(\mathfrak{J})\to\alpha\in\mathfrak{b}\to(\alpha)_\nu\leqq\mathfrak{b}\to(\alpha)_\nu\in\mathfrak{J}(\mathfrak{b})$$

デアルカラ, $\mathfrak{J}\leqq\mathfrak{J}(\mathfrak{b})<\bar{R}_R$　シカルニ $\mathfrak{J}$ ハ極大デアルカラ $\mathfrak{J}=\mathfrak{J}(\mathfrak{b})$
故ニ (V) ヨリ　$\mathfrak{a}(\mathfrak{J})=\mathfrak{a}(\mathfrak{J}(\mathfrak{b}))=\mathfrak{b}$ トナッテ仮定ニ反スル. 従ッテ $\mathfrak{a}(\mathfrak{J})$ ハ R ノ極大両側イデアルデアル.

<u>補題3.1</u>　R ニ於テハ既約ト両側単純トハ同義デアル.

(註)　一般ニ単純環ハ既約ナルコトハ明カデアル. (前論話 "環ノ右イデアル束" 定理3.1参照)　次ニ連続正則環ニ於テハ, 定理6.1及ビ定理1.2ヨリ R ノ極大両側イデアル $\mathfrak{a}$ ト $\bar{R}_R$ ノ極大中立イデアル $\mathfrak{J}$ ト Z_R ノ極大イデアル $\mathfrak{z}$ トノ間ニ一対一ノ対応ガアル. 前論話 "環ノ右イデアル束" 定理3.3 カラ R ガ既約デアルトキハ, $\bar{R}_R$ ハ既約デアルカラ, Z_R ハ (0) ト (1) ノミカラナル　故ニ $\mathfrak{z}$ ハ (0) ノミカラナリ　$\mathfrak{J}=\mathfrak{J}(\mathfrak{z})$ ハ (0) ノミヨリナル. 従ッテ $\mathfrak{a}(\mathfrak{J})$ ハ (0) ノミデアル.
故ニ R ハ単純デアル.

<u>補題3.2</u>　$\mathfrak{a}$ ヲ R ノ極大両側イデアルトシ, $\mathfrak{J}=\mathfrak{J}(\mathfrak{a})$ ヲ $\mathfrak{a}$ ニ対応スル $\bar{R}_R$ ノ極大中立イデアルトスル. 剰余環 $R/\mathfrak{a}$ ノ元ヲ $x/\mathfrak{a}$ トスレバ $(x/\mathfrak{a})_\nu\longleftrightarrow(x)_\nu/\mathfrak{J}$ ナル対応ニヨッテ $\bar{R}_{R/\mathfrak{a}}$ ハ $\bar{R}_R/\mathfrak{J}$ ニ同型デアル. 従ッテ $R/\mathfrak{a}$ ハ既約連続正則環デアル.

(註) (i) $R/\mathfrak{a}$ ハ正則環デアルコトハ明カデアルカラ $\bar{R}_{R/\mathfrak{a}}$ ハ補元束デアル.
今 $(\alpha/\mathfrak{a})\leqq(\beta/\mathfrak{a})_\nu$　トスレバ $\alpha/\mathfrak{a}=\beta/\mathfrak{a}\cdot x/\mathfrak{a}=\beta x/\mathfrak{a}$　ナル $x\in R$ ガ存在スル. 故ニ $\alpha\equiv\beta x\ (\mathfrak{a})$　従ッテ $\alpha=\beta x+\zeta$ ナル $\zeta\in\mathfrak{a}$ ガ存在スル.
シカルトキハ $(\alpha)_\nu\leqq(\beta)_\nu\cup(\zeta)_\nu$　$(\zeta)_\nu\leqq\mathfrak{a}$ 即チ $(\zeta)_\nu\in\mathfrak{J}=\mathfrak{J}(\mathfrak{a})$ ナル
故 $(\alpha)_\nu/\mathfrak{J}\leqq(\beta)_\nu/\mathfrak{J}$ デアル.

(ii) 次ニ $(\alpha)_\nu/\mathfrak{J}\leqq(\beta)_\nu/\mathfrak{J}$ トスレバ. $(\alpha)_\nu\cup(\zeta)_\nu\leqq(\beta)_\nu\cup(\zeta)_\nu$,
$(\alpha)_\nu\frown(\zeta)=(0)$, $(\beta)_\nu\frown(\zeta)_\nu=(0)$　ナル $(\zeta)_\nu\in\mathfrak{J}$ ガ存在スル.　シカルトキハ

$(\alpha)_r=(\varepsilon)_r,\ (\xi)_r=(\varepsilon_1)_r,\ (\beta)_r=(\eta)_r,\ (\zeta)_r=(\eta_1)_r.$

$\varepsilon\varepsilon_1=\varepsilon_1\varepsilon=0.\ \eta\eta_1=\eta_1\eta=0$

ナル冪等元 $\varepsilon,\varepsilon_1,\eta,\eta_1$ ガ存在シテ

$$(\varepsilon+\varepsilon_1)_r\leqq(\eta+\eta_1)_r,\quad \varepsilon_1,\eta_1\in\mathfrak{a}=\mathfrak{a}(J)$$

デアル. 故ニ

$$\varepsilon+\varepsilon_1=(\eta+\eta_1)(\varepsilon+\varepsilon_1)=\eta\varepsilon+\eta_1\varepsilon+\eta\varepsilon_1+\eta_1\varepsilon_1.\ \eta_1\varepsilon+\eta\varepsilon_1+\eta_1\varepsilon_1\in\mathfrak{a}$$

デアルカラ $\varepsilon\equiv\eta\varepsilon\ (\mathfrak{a})$ 即チ $\varepsilon/\mathfrak{a}=\eta/\mathfrak{a}\cdot\varepsilon/\mathfrak{a}$ デアルカラ.

$(\varepsilon/\mathfrak{a})_r\leqq(\eta/\mathfrak{a})_r.$

他方 $(\alpha)_r=(\varepsilon)_r$ ヨリ $\alpha=\varepsilon\alpha,\ \varepsilon=\alpha\chi\ (\chi\in\mathfrak{R})$ デアルガ $\alpha/\mathfrak{a}=\varepsilon/\mathfrak{a}\cdot\alpha/\mathfrak{a}.$

$\varepsilon/\mathfrak{a}=\alpha/\mathfrak{a}\cdot\chi/\mathfrak{a}.$ 故ニ $(\alpha/\mathfrak{a})_r=(\varepsilon/\mathfrak{a})_r.$ 同様ニ $(\beta/\mathfrak{a})_r=(\eta/\mathfrak{a})_r$

従ツテ $(\alpha/\mathfrak{a})_r\leqq(\beta/\mathfrak{a})_r.$

(iii) (i),(ii) ヨリ $\overline{R}_{\mathfrak{R}/\mathfrak{a}}$ ト $\overline{R}_{\mathfrak{R}}/J$ トハ $(\alpha/\mathfrak{a})_r\leftrightarrow(\alpha)_r/J$ ナル関係ニヨッテ 一対一ノ対応ヲナシ, シカモソノ順序ヲ変ヘナイ. 故ニ $\overline{R}_{\mathfrak{R}/\mathfrak{a}}$ ハ $\overline{R}_{\mathfrak{R}}/J$ ト同型デアル. $\overline{R}_{\mathfrak{R}}/J$ ハ既約連続補環束デアルカラ $\overline{R}_{\mathfrak{R}/\mathfrak{a}}$ モソウデアル. 即チ $\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$ ハ既約連続正則環デアル。

<u>定義3.1</u> 環ノ集合 $(\mathfrak{R}_\lambda;\lambda\in I)$ ガ与エラレタトキ, $\mathfrak{R}_\lambda\ (\lambda\in I)$ ニ属スル元 α_λ ノ組 $[\alpha_\lambda;\lambda\in I]$ ヲ考エ

$$[\alpha_\lambda;\lambda\in I]+[\beta_\lambda;\lambda\in I]=[\alpha_\lambda+\beta_\lambda;\lambda\in I]$$

$$[\alpha_\lambda;\lambda\in I]\cdot[\beta_\lambda;\lambda\in I]=[\alpha_\lambda\beta_\lambda;\lambda\in I]$$

ト定義スルトキハ $[\alpha_\lambda;\lambda\in I]$ ノ全体ハ一ツノ環ヲ作ル. コレヲ $(\mathfrak{R}_\lambda;\lambda\in I)$ ノ直積ト云イ, $\Pi(\mathfrak{R}_\lambda;\lambda\in I)$ デアラワス.

<u>定理3.2</u> (埋蔵定理) 連続正則環 $\mathfrak{R}$ ノ極大両側いでやる $\mathfrak{a}$ ノ全体ヲ Ω トスレバ, $\mathfrak{R}$ ハ既約(単純)連続正則環 $\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$ ノ直積 $\Pi(\mathfrak{R}/\mathfrak{a};\mathfrak{a}\in\Omega)$ ノ部分環ト同型デアル.

(証) 補題 3.2 ヨリ $\mathfrak{R}/\mathfrak{a}$ ハ既約連続正則環デアル. $\Pi(\mathfrak{R}/\mathfrak{a};\mathfrak{a}\in\Omega)$ ノ元ノ中一ツノ α ヲ用イテ $[\alpha/\mathfrak{a};\mathfrak{a}\in\Omega]$ ノ如クアラワサレル元ノ全体ヲ $\mathfrak{R}_0$ トスレバ $\mathfrak{R}_0$ ハ $\mathfrak{R}$ ニ準同型デアル. 次ニ $\alpha\neq0$ トスレバ 定理 1.1 及ビ定理 1.2 ヨリ $(\alpha)_r^{\perp}$ ヲ含マナイ $\overline{R}_{\mathfrak{R}}$ ノ極大中立いでやる J_0 ガ存在スル. シカルトキハ定理 3.1 ヨリ $\mathfrak{a}_0=\mathfrak{a}(J_0)$ ハ α ヲ含マナイ. 故ニ $\alpha/\mathfrak{a}_0\neq0/\mathfrak{a}_0$ デアル.

従ッテ $\mathfrak{R}$ ト $\mathfrak{R}_0$ トノ間ニハ一對一ノ對應ガアル。故ニ $\mathfrak{R}_0$ ハ $\mathfrak{R}$ ニ同型デアル.

〔注意3.1〕 $\mathfrak{R}$ ガ準單純環ノトキハ $\overline{\mathfrak{R}}_{\mathfrak{R}}$ ハ有限次元補模束デアルカラ $\mathfrak{R}$ ハ連續正則環デアル. コノトキ Ω ハ有限集合ニナリ $\mathfrak{R}$ ハ直積 $\prod(\mathfrak{R}/\mathfrak{a};\ \mathfrak{a}\in\Omega)$ 自身ト同型ニナル. コノコトハ準單純環ハ有限個ノ單純ナ部分環ノ直和ニ分解セラレルコトヲ意味シテイル.