

119. パンチドカードメソッドによる非線型方程式の数値解法

清水辰次郎 片山有- (1948.9.9)

我々に於ては実用性ある計算器械は極めて少し、¹⁾ 従つて複雑な数値計算を実行しようとするれば、I. B. M. 統計機械に²⁾ よるより他に方法がない。著者は約八年前より同様にさる数値計算を考へてきたが、同様を待たせんとする非線型方程式の数値解法に利用した。科学技術の進歩は、線型の關係に於ては不十分となり非線型の幾多の問題を解く必要に迫られてゐる。これらの問題の或者は直接の数値計算法にて解き得られるが、或種の問題例へば境界値を与へられた非線型微分方程式の解法、非線型積分方程式の解法の如き、高次代数連立方程式の解法に類番させると都合のよい場合が少くない。

一方代数方程式は一元のものは数値計算をやり易し、これは根の第一近似値の求め易いことによる。二元までは高次連立方程式もグラフを画くことにより第一近似根を求めることは或程度の困難さに止るといふこともできるが三元以上の高次連立方程式に至つては根の第一近似を求めることは普通の数値計算に於ては絶望に近いとされてゐる。理論的には消去法により高次一元方程式に帰するが、その方法は実用的ではない。

著者は統計機械の高し性能により高次連立方程式の第一近似根を探する方法を実施しこれにより非線型微分方程式の境界値問題を解く方法を示す。高次連立方程式は第一近似が求められれば、その精度を上げることは *Newton* 法、或は *Iteration* 法等比較的容易に根の近似度を上げる事ができることはよく知られてゐる。³⁾

1) 微分方程式解法誌(として著者の研究室及び応用数学研究所に於るもの)及び統計記録機(山下研究室試作のもの)尚二三の試験中のものがあるが現時に於る程度の実用性あるものはない。

2) アメリカインターナショナルビジネスマシーン コオペレーションの統計機械の組については著者のパンチドカードメソッドによる数値計算誌、東京電機学会誌。

3) 尤もこれらの方法が適用せられるには第一近似は相当によい近似であることを受ける。元の根が既知するに依つて益々近似度のよいことが必要となる。

(I) 代数高次連立方程式の解法.

与へられた連立方程式に数学的考察をして根の大体の限界を求めその間隔を10乃至100等分(根の位置が推定せられる場合は等間隔でなくその附近を細かにする)してそれらのあらゆる組合せの数值を方程式に代入して計算する. そのうちに全部の方程式を或程度満足する根の等組かを得る筈である. これによりその近くの区間を更に細分して同法を繰返す. ここにより第一近似根の組を得ることかできる.

例として

$$f_1 \equiv a_1 x^3 + a_2 xy + a_3 z^2 + a_4 x + a_5 z + a_6 = 0$$

$$f_2 \equiv y^3 + b_2 x^2 y + b_3 z x + b_4 y + b_5 z + b_6 = 0$$

$$f_3 \equiv x^2 + c_2 x z^2 + c_3 z y^2 + c_4 xy + c_5 x + c_6 = 0$$

以下ついで考えよう.

先づ10枚のカードの第一行は夫々1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0を穿孔して取様な10枚のカード100組をつくる.

次に最初の10枚の第二行は1, 次の10枚の第二行は2, ...最後の10枚の第二行は0を穿孔する.

次に最初の100枚のカードの第三行は1, 次の100枚は2 ...最後の100枚の第三行は0を穿孔する.

漸次にして1000枚のカードが第一, 第二, 第三行に穿孔される. これをソーターにて分類する機とする.

今暗探法に代入してみる x, y, z の数字を三桁のものとし それを夫々 $x_1, x_2, \dots, x_{10}, y_1, y_2, \dots, y_{10}, z_1, z_2, \dots, z_{10}$ とすれば 先づ第1, 第101, 第201, ... 第901番目のカード(計10枚)は第四行から第六行まで夫々 x_1, x_2, \dots, x_{10} を穿孔し, それを親カードとして夫々100枚のカードで第四行から第六行は夫々 x_1, x_2, \dots, x_{10} を穿孔したものをつくる.

次にそれらのカードは第七行から第九行 第十行から第十二行は夫々 x_i を穿孔する即ち x_i が三つ並んで穿孔される.

次に x_i の穿孔された1000枚のカードを第二行により10個の箱ホカツトに

介級し、分組されたものに対して x_i と同様に y_i を第十三行から第十五行、第十六行から第十八行、第十九行から第二十一行まで三つ並べて穿孔する。

次に第一行はよりぞからのカードを十個に分けて全く同様 Z_i を第二十二行から第二十四行、第二十五行から第二十七行、第二十八行から第三十行まで三つ並べて穿孔する。

次に計算穿孔機にて夫々 $x_i^2, x_i y_i, z_k^2, \dots, x_i^2 y_j, \dots$ 等方程式に現われる項を計算して穿孔させる。次に第一、第二、第三には前と同じ穿孔をもつ1000枚のカードを六組とつて第一組には x_i^3, y_j^3, z_k^3 、第二組には $x_i y_i, x_i^2 y_i, x_i z_k^2$ 、第三組には $z_k^2 x_i, z_k z_k y_i^2$ 、第四組には x_i, y_i 、第五組には z_k, z_k, x_i 、第六組には a_i, b, c_6 を穿孔する。こゝに C といいぬ数は方程式の項の数である。

次に $a_1, a_2, a_3, \dots, b_2, b_3, \dots, c_2, c_3, \dots$ を親カードとして群集値にて1000枚のカード六組か所用の項が穿孔せられたものを得る

コレクターにて6枚のカードの1000組となるよう順序を変えて f_1, f_2, f_3 を加算する。α- 全計算機にて f_1, f_2, f_3 の値の表をつくる。

以上の x, y, z の数値のうち根の組に充分近いものがあるれば f_1, f_2, f_3 は充分0に近しいものが現われる筈である。

以上の方法は方程式の項をつくるのに無駄が多いが、組合せの数が多くなると組織的にやらなければならぬ。尤も組合せの数の多くなるときや項数の多くなるときは初めから $a_i x_i y_i, \dots$ 等を計算機で計算してカードの所用数を穿孔して f_1, f_2, f_3 を計算すればいい。

実例として

$$f_1 \equiv 21.6 x^3 + 1.8 x y - z^2 + 5.3 x + 2.1 z - 160.1 = 0$$

$$f_2 \equiv y^3 + 13.1 x^2 y - 1.3 x z + 5.3 y + 2.4 z - 596.4 = 0$$

$$f_3 \equiv x^3 + 2.1 z^2 x - 11.7 y z - 21.6 x y - x - 450.1 = 0$$

は $|x|, |y|, |z| < 10$ なる根の組を求めるには先づ計算により $1 < x < 3$,

$4 < y < 8, -7 < z < 0$ なることがわかるから $x = 1, 2, 3, y = 4, 5,$

$6, 7, 8, z = 0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7$ を代入した一部を示せば、

x	y	z	f_1	f_2	f_3
1	6	-1	-125.5	-271.1	-156.4
1	6	-2	-130.6	-272.2	+271.1
1	7	-1	-123.7	-125.7	-25.9
1	7	-2	-128.8	-126.8	+553.7
2	6	-1	-41.8	-34.0	-277.9
2	6	-2	+36.7	-33.8	+155.9
2	7	-1	+40.5	+150.7	-169.0
2	7	-2	+40.3	+150.9	+416.9
y	z	x			
6	-1	1	-125.5	-271.1	-156.4
6	-1	2	+41.8	-34.0	-277.9
6	-2	1	-130.6	-272.2	-271.1
6	-2	2	+36.7	-33.8	+155.9
7	-1	1	-123.7	-125.7	-25.9
7	-1	2	+45.4	+150.7	-169.0
7	-2	1	-128.8	-126.8	+553.7
7	-2	2	+40.3	+150.9	+416.9
x	z	y			
1	-1	6	-125.5	-271.1	-156.4
1	-1	7	-123.7	-125.7	-25.9
1	-2	6	-130.6	-272.2	+271.1
1	-2	7	-128.8	-126.8	+553.7
2	-1	6	+41.8	-34.0	-277.9
2	-1	7	+45.4	+150.7	-169.0
2	-2	6	+36.7	-33.8	+155.9
2	-2	7	+40.3	+150.9	+416.9
1.8	6.4	-1.4	-8.8	-28.8	-16.6
		-1.6	-9.8	-28.4	+73.7
	6.6	-1.4	-8.1	+5.5	+18.2
		-1.6	-9.2	+6.1	+122.4
20	6.4	-1.4	+41.4	+35.3	-41.3
		-1.6	+40.4	+35.3	+57.1
	6.6	-1.4	+42.1	+72.2	-7.5
		-1.6	+41.1	+72.2	+96.9

根の組の近似度が充分でないときは f_1, f_2, f_3 は 0 に近くはないが, x, y, z のうち二つをとめて第三のものを動かすとき f_1, f_2, f_3 のすべてがどこかで符号を変えること前表の如くであるから根の所在がわかる。

尤もこのことは三つの曲面 f_1, f_2, f_3 が三次元空間に接するものがあつたり又は三つとも極度に接近していたりすると左様にはならぬときがあり得るが、前者は $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ が要となるものがあることから排除することができ、後者は更に区間を細分すればわかる筈である。

(II). 應用として次の微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = y^2 + 4\pi^2 \sin \pi \left(t - \frac{1}{2} \right)$$

の $t = -\frac{1}{2}, y = 0; t = \frac{1}{2}, y = 0$ なる境界値をもつ解を計算してみた。

境界条件が与えられているから積分方程式の形に直して非線型の方程式となり、数値積分法にみり π 五 π の方程式に帰着させて第一近似値を求めてみると、

$t_1 = -0.459$	$y_1 = 1.636$
$t_2 = -0.269$	$y_2 = 1.804$
$t_3 = 0.$	$y_3 = 2.624$
$t_4 = 0.269$	$y_4 = 1.804$
$t_5 = 0.453$	$y_5 = 1.636$