118. 級數ノ總和法ニツイテ

京都工專　花井七郎（8月10日）

$A=(a_{ik})$ ヲ一ツノ無限行列トシ $x=\{\xi_i\}$ ヲ一ツノ数列トスル．ソシテ $A_i(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}\xi_k$ $(i=1.2\cdots\cdots)$ ハ收斂スルモノトスル．

数列 $\{A_i(x)\}$ ノ極限値 $\lim_{i\to\infty}A_i(x)$ ガ存在スルトキ．x ハ總和法 A ニヨツテ *sommable* デアルト云フ．S. Banach[1] ハ次ノ定理ヲ証明シテヰル．即チ

A ヲ *permanent* ナ総和法トシ．$y_0=\{\eta_i^0\}$ ハ一ツノ收斂数列トスル．若シ $\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|<\infty$ 且ツ $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i a_{ik}=0$ $(k=1,2,\cdots\cdots)$ ナル如キ任意ノ数列 $\{\alpha_i\}$ ニ對シテ $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\eta_i^0=0$ ガ成立スルトキハ任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シテ一ツノ收斂数列 x ガ存在シテ $|A_i(x)-\eta_i^0|<\varepsilon$, $(i=1,2,\cdots\cdots)$

此処デハ上ノ定理ノ逆ガ成立スルコトヲ証明シ　ソレカラ導カレル結果ヲ述ベル．

以下定義ノ記号等ハ S. Banach ニ従フコトニスル．

〔定理〕 I ―― A ヲ *permanent* ナ總和法トシ．$y_0=\{\eta_i^0\}$ ハ一ツノ收斂数列トスル．若シ任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對應シテ一ツノ收斂数列 $x=\{\xi_i\}$ ガ存在シテ $|A_i(x)-\eta_i^0|<\varepsilon$ $(i=1,2,\cdots\cdots)$ ガ成立スルトキハ $\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|<\infty$ 且ツ $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i a_{ik}=0$, $(k=1,2,\cdots\cdots)$ ナル任意ノ数列 $\{\alpha_i\}$ ニ對シテ $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\eta_i^0=0$

【証明】　今．收斂数列ノ全体カラナル空間ヲ (C) トスレバ (C) ハ一ツノ Banach 空間デアル．$\sum_{1}^{\infty}|\alpha_i|<\infty$ デアルカラ．$x=\{\xi_i\}\in(C)$ トスルトキ

(1) $f(x)=\alpha \lim_{i\to\infty} \xi_i + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$, 但シαハ常数.

ハ空間(C)ニ於ケル線型汎函数デアル.

仮定ニヨツテ $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots > 0$. $\lim_{j\to\infty} \varepsilon_j = 0$ ナル $\{\varepsilon_j\}$ ニ對応シテ(C)ノ点列 $\{x_j\}$ ガ存在シテ

(2) $$|A_i(x_j) - \eta_i^0| < \varepsilon_j \quad (i=1,2,\cdots\cdots)$$

然ルニAハ permanent デアルカラ $\lim_{i\to\infty} A_i(x_j) = \lim_{n\to\infty} \xi_n^j$

但ノ $x_j = \{\xi_n^j\}$ トスル.

然ツテ数列 $A_1(x_j), A_2(x_j), \cdots\cdots$ ハ空間(C)ノ点デアル.

今此ノ数列ヲ $A(x_j)$ ニテ表ハスコトニスル.

(2)ヨリ $\lim_{j\to\infty} A(x_j) = y_0$ (勿論(C)ノノルムニヨツテ收歛)

(1)ヨリ $f\{A(x_j)\} = \alpha \lim_{i\to\infty} A_i(x_j) + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i A_i(x_j)$

然ルニ $\lim_{i\to\infty} A_i(x_i) = \lim_{n\to\infty} \xi_n^j$ ナルガ故ニ

$$f\{A(x_j)\} = \alpha \lim_{n\to\infty} \xi_n^j + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k^j\right)$$

然ルニAハ permanent デアルカラ O. Toeplitz ノ定理[2)]ニヨリ

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_i| \cdot |a_{ik}| \cdot |\xi_k^j| \leqq M \cdot \|x_j\| \cdot \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|, \quad M\text{ハ常数}$$

従ツテ $f\{A(x_j)\} = \alpha \lim_{n\to\infty} \xi_n^j + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^j \left(-\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_{ik}\right)$

然ルニ仮定カラ $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_{ik} = 0$, $(k=1,2,\cdots)$ ナル故ニ

$$f\{A(x_j)\} = \alpha \lim_{n\to\infty} \xi_n^j$$

然ルニ $f(x)$ ハ(C)ニオケル定理凡函数デアル.

$$\lim_{j\to\infty} f\{A(x_j)\} = f(y_0)$$

従ツテ

(3) $$\alpha \lim_{n\to\infty} \eta_n^0 + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \eta_i^0 = \alpha \lim_{j\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} \xi_n^j\right)$$

(2)ヨリ $$\lim_{i\to\infty} |A_i(x_j) - \eta_i^0| \leqq \varepsilon_j.$$

従ツテ今 $\lim_{n\to\infty} \eta_n^0 = \eta^0$ トスレバ Aガ permanent デアルカラ

$$\lim_{j\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\xi_n^j\right)=\eta_i^0$$

従ツテ (3) ヨリ $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\eta_i^0=0$ 〔証終〕

次ニ Aハ *permanent* ナ総和法トシ 空間(C)ノスベテノ点xニ対シテ $\{A_i(x)\}$ ナル数列ヨリナル集合ヲS_Aトスレバ、明カニ $S_A\subset(C)$. 前記ノ Banach ノ定理ト〔定理〕1トカラ次ノ定理ガ成立スル.

〔定理〕2 S_A ガ空間(C)ニテ到ル処 *dense* デアルタメノ必要且ツ十分ナル條件ハ. $\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|<\infty$, 且ツ $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i a_{ik}=0$ ($k=1.2,$) ナルトキハ $\alpha_i=0$ ($i=1.2,\cdots$)

〔証明〕 <u>必要ナルコト.</u> 今点 $y_0=\{\eta_i^0\}$, 但シ $\eta_1^0=1$, $\eta_i^0=0\ (i\neq1)$ ヲ考ヘル. 明カニ $y_0\in(C)$ デアルカラ〔定理〕1カラ $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\eta_i^0=\alpha_1=0$
同様ニシテ $\alpha_i=0$ ($i=2,3\cdots\cdots$)

<u>十分ナルコト</u> S. Banach[3] ニヨツテ証明サレテヰル.

〔定理〕3. Aハ *permanent* 且ツ *reversible* ナ総和法トスル.
若シ $\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|<\infty$ 且ツ $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i a_{ik}=0$ ($k=1,2,\cdots$) デアツテ而モ或一ツノiニ対シテ $\alpha_i\neq0$ ナル如キ数列 $\{\alpha_i\}$ ガ存在スルトキハ. Aニヨツテ *sommable* デ而モ一次独立ナ発散数列ノスベテヨリナル集合ノ濃度ハ $\aleph_0$ 以上デアル.
(即チ可附番無限個以上デアル)

〔証明〕 〔定理〕2ヨリ. (C)ノ或一ツノ球Kガ存在シテ$K\cdot S_A=0$. 今Kノ中心ヲ $x_0=\{\xi_k^0\}$, 半径ヲr_0トスル. (C)ノ点x_nヲ次ノ如キモノトスル.
$x_n=\{\xi_k^n\}$ 但シ$n\neq k$ノトキハ $\xi_k^n=\xi_k^0$, $\xi_n^n=\xi_n^0+r$; ($0<r<r_0$トス)
然ルトキ空間(C)ノ点列 $\{x_n\}$ ハ明カニ球Kニ含マレ且ツ一次独立デアル.
而シテAハ *reversible* デアルカラ $x_n=A(y_n)$ ($n=1,2,\cdots$) ナル発散数列 y_n ノ集合ハ一次独立デアルコトハ容易ニ分ル.

〔証 終〕

---

1) S. Banach, Théorie des opérations linéaires. p. 91.
2) 同上 p. 90
3) 同上 p. 93