115. 直観論理に於ける否定の取扱ひに関して

大西 正男 (1948. 8. 28)

直観主義数学に於ける論理の形式的な考察には G. Gentzen 及 Heyting 等の深い研究があり，更に最近黒田成勝氏が古典論理との関係に於ける報告をされてゐるが，本篇では表題の項目に就く一つの観方を述べようと思ふ。

命題 A. B. …… に関し Aの否定を $\overline{A}$，AならばBを $A\subset B$．A且Bを $A\wedge B$，A或はBを $A\vee B$，$(A\subset B)\wedge(B\subset A)$ を $A=B$ と夫々記して命題を表すことにする。先づ否定に関して 命題間の $\subset$ なる Inklusion に就て次の三つの性質がある。

I) $A\subset\overline{\overline{A}}$ (矛盾律!)

II) $A\subset B$ ならば $\overline{\overline{A}}\subset\overline{\overline{B}}$ (対偶の理による)

III) $\overline{\overline{\overline{\overline{A}}}}=\overline{\overline{A}}$ ($\overline{\overline{\overline{A}}}=\overline{A}$ による)

上記は何れも直観的に保証される所の論理的帰結であるが この三つの Satz から $\overline{\overline{A}}$ をAの "closure" と考へれば命題の作る "lattice" に "topology" が考へられる。(但し closure-operator は additive ではない)

即ち I) は包含性，II) は単調性 III) は巾等性に相当するから，直ちに次の "等式" が得られる。

$$\overline{\overline{A\cup B}} = \overline{\overline{\overline{\overline{A}}\vee\overline{\overline{B}}}}$$

$$\overline{\overline{A}}\wedge\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{\overline{\overline{A}}\wedge\overline{\overline{B}}}} \quad (\text{"開集合"の"交り"は又 開集合"!})$$

---

1) 文献 2) ノ論文

尚 *Negation* の意味から

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \qquad (*)$$

$$\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cap B}$$ が成立する。

以上の諸式を用ひて次の一連の等式が容易に得られる。

$$\begin{cases} \overline{\bar{A} \cap \bar{B}} = \overline{\overline{\bar{\bar{A}} \cup \bar{\bar{B}}}} \\ \overline{\overline{\bar{A} \cap \bar{B}}} = \overline{\bar{\bar{A}} \cup \bar{\bar{B}}} \\ \overline{\bar{\bar{A}} \cap \bar{\bar{B}}} = \overline{\overline{\bar{A} \cup \bar{B}}} \\ \overline{\overline{\bar{\bar{A}} \cap \bar{\bar{B}}}} = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}} \end{cases}$$

㊟ 証明はすべて (*) によつて右辺を変形し一般に $\bar{A}$ なる形の命題が "*closed*" なることに注意すればよい。

即ち、$\cap$ と $\cup$ と及び $^{-}$ と $^{=}$ との間に "*duality*" が成立する。古典論理に於ては常に $A = \bar{\bar{A}}$ であるが、上の等式は従つて通常の De Morgan の法則を含んである。

以上の他に更に次の等式が成立つ。

$$\bar{\bar{A}} \cap \bar{\bar{B}} = \overline{\overline{A \cap B}}$$

左辺 $\supset$ 右辺は明かであるから、$\bar{\bar{A}} \cap \bar{\bar{B}} \subset \overline{\overline{A \cap B}}$ を証明する。

一般に $A \cap B \subset C$ なるとき、

$$A \cap \bar{C} \subset \bar{B}$$

である。これは本格的には対偶の理であるが 形式的に観れば

$$\overline{A \cap B} = (A \subset \bar{B}) \qquad (\subset も一つの \text{"operation"})$$

及び $A \cap (A \subset B) \subset B$

が又直観的に正しい式であることに注意すれば

$$A \cap \bar{C} \subset A \cap (\overline{A \cap B}) \qquad (A \cap B \subset C \text{ による})$$

$$= A \cap (A \subset \bar{B}) \subset \bar{B}$$

と証明される。この *Satz* を用ひて

$$A \cap B \subset A \cap B$$

なる *Grundformel* から出発すれば

$$A \cap (\overline{A \cap B}) \subset \bar{B},$$

更に $A \cap \bar{\bar{B}} \subset \overline{\overline{A \cap B}}$

$A, \overline{\overline{B}}$を入れ換へて同じ過程を繰返せば

$$\overline{\overline{A}} \wedge \overline{\overline{B}} \subset \overline{\overline{A \wedge B}} \quad (\ \overline{\overline{}}\ は巾等性をもつ)$$

以上を集合して表記すれば

$$\left(\begin{array}{l} A \cap B \subset \overline{\overline{A}} \wedge \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A \wedge B}} = \overline{\overline{\overline{\overline{A}} \wedge \overline{\overline{B}}}} = \overline{\overline{A} \vee \overline{B}} \\ A \cup B \subset \overline{\overline{A}} \vee \overline{\overline{B}} \subset \overline{\overline{A \vee B}} = \overline{\overline{\overline{\overline{A}} \vee \overline{\overline{B}}}} = \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}} \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{l} \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} = \overline{\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}} = \overline{\overline{\overline{A}} \cup \overline{\overline{B}}} \\ \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \wedge B} = \overline{\overline{\overline{A} \vee \overline{B}}} = \overline{\overline{\overline{A}} \wedge \overline{\overline{B}}} \end{array}\right.$$

但しこの一部は先に宇田元が挙げられてゐる.

次に *Alle*- 及び *Existenz-Zeichen* の附いた命題に就て考へるのであるが 通常の $\forall x A'(x)$ を $\bigcap_x A(x)$ 又は單に $\wedge A$ 　$\exists x A(x)$ を $\bigcup_x A(x)$ 又は單に $\bigcup A$ で表すことにして 上の場合と同様に考察を進める. 但しこの場合の上の表式に相当する結果は既に Heyting 及び黒田氏によつて得られてゐるが、その導出過程に於ける我々の記号の特色を設たいと思ふ.

ここで前述の $\wedge$ 及び $\cup$ なる *operation* に関しては与へなかつた基本的な *Folgerung* を そのまゝ共通の記号 $\bigcap_x A(x)$, $\bigcup_x A(x)$ に就ても成立するのであるから 一括して置かう. すべては "*lattice*" に對する *Analogie* を示してゐる.

$$\bigcap_x A(x) \subset A(x) \subset \bigcup_x A(x)$$

$$\bigcap_x (A(x) \subset B) = (\bigcup_x A(x) \subset B)$$

$$\bigcap_x (B \subset A(x)) = (B \subset \bigcap_x A(x))$$

$$\bigcup_x (B \subset A(x)) = (B \subset \bigcup_x A(x))$$

$$\bigcup_x (A(x) \subset B) = (\bigcap_x A(x) \subset B)$$

從つて $\overline{}$ なる "closure operator" に関して,

$$\left(\begin{array}{l} \overline{\bigcup \overline{A(x)}} = \overline{\bigcup \overline{A(x)}} \\ \bigcap \overline{\overline{A(x)}} = \overline{\overline{\bigcap \overline{\overline{A(x)}}}} \end{array}\right.$$

又

$$\begin{cases} \overline{\cup A(x)} = \cap \overline{A(x)} & (**) \\ \cup \overline{A(x)} \subset \overline{\cap A(x)} \end{cases}$$

も明かである。

次に二つの不等式を証明する。

$$\begin{cases} \overline{\overline{\cap A(x)}} \subset \cap \overline{\overline{A(x)}} \\ \cup \overline{\overline{A(x)}} \subset \overline{\overline{\cup A(x)}} \end{cases}$$

任意の x に就いて $\cap A(x) \subset A(x)$

故に $\overline{\overline{\cap A(x)}} \subset \overline{\overline{A(x)}}$

$$\therefore \overline{\overline{\cap A(x)}} \subset \cap \overline{\overline{A(x)}}$$

他も全く同様である。

次に二つの等式を挙げよう。

$$\begin{cases} \overline{\cap \overline{\overline{A(x)}}} = \overline{\overline{\cup \overline{A(x)}}} \\ \overline{\cup \overline{\overline{A(x)}}} = \overline{\overline{\cap \overline{A(x)}}} \end{cases}$$

即ち "*duality*" を示す式の二つである。証明は (**) から明かであらう。

他の二つは

$$\overline{\cap \overline{A(x)}} = \overline{\overline{\cup \overline{\overline{A(x)}}}}$$

$$\overline{\cup \overline{A(x)}} = \overline{\overline{\cap \overline{\overline{A(x)}}}}$$

であるが右辺は夫々 $\overline{\cup A(x)}$ $\cap \overline{A(x)}$ に"等しい"のであるからこれも (**) より明かである。

以上で次の表解が得られた。

$$\begin{cases} \cap A \subset \overline{\cap A} \subset \cap \overline{\overline{A}} = \overline{\cap \overline{\overline{A}}} = \overline{\cup \overline{A}} \\ \cup A \subset \cup \overline{\overline{A}} \subset \overline{\overline{\cup A}} = \overline{\overline{\cup \overline{\overline{A}}}} = \overline{\cap \overline{A}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cap \overline{A} = \overline{\cup \overline{\overline{A}}} = \overline{\cap \overline{A}} = \overline{\cup A} \\ \cup \overline{A} \subset \overline{\cap \overline{\overline{A}}} = \overline{\overline{\cup \overline{A}}} \subset \overline{\cap A} \end{cases}$$

次に⊂なる *operation* をほどこした命題に関して同様の考察が行はれるが、

その結果だけを挙げることにする。

$$(\bar{\bar{A}} \subset B) \subset (A \subset B) \subset (\bar{A} \supset \bar{B}) = (A \subset \bar{\bar{B}}) = (\bar{\bar{A}} \subset \bar{\bar{B}})$$

$$= \overline{\overline{(\bar{\bar{A}} \subset B)}} = (\overline{\overline{A \subset B}}) = (\overline{\overline{\bar{A} \supset \bar{B}}}) = (\overline{\overline{A \subset \bar{\bar{B}}}}) = (\overline{\overline{\bar{\bar{A}} \subset \bar{\bar{B}}}})$$

$$= \overline{A \cap \bar{B}} = \overline{\overline{\overline{\bar{A} \cup B}}} = \overline{\overline{\bar{A} \cup \bar{\bar{B}}}} = \overline{\bar{\bar{A}} \cap \bar{B}}$$

以上を通じて観られることは一般に $\bar{A}$ なる形の命題のもつ *Normalität* である。それはかゝる命題の "*closedness*" 言ひ換へればそこでは排中律が成立することに因る。