

114. 無限聯立一次方程式ニツイテ (I)

京都工專 花井七郎 (1947.8.1)

無限聯立一次方程式ヲ解ク場合ニ 所謂截片方法ニヨルノガ最モ自然デアルト思ハレリ. F. Riesz¹⁾ノ著書ニ截片方法デホメタ結果ガ原ノ聯立一次方程式ヲ満足シナイ例ガ載ツテキル. 此処デハ G. Köthe, O. Toeplitz²⁾ガ論ツタ線状座標空間ニ於テ定義サレタ無限聯立一次方程式カ截片方法デ解ケルタメノ條件ヲホメテ見ル. 簡單ノタメニ記号, 定義等ハ Köthe, Toeplitzニ從フコトトスル.

無限聯立一次方程式 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} y_k = x_i, (i=1, 2, \dots)$ ----- (1)
ニテ $y = (y_1, y_2, \dots)$, $\beta = (x_1, x_2, \dots)$ ハ夫々線状座標空間 λ, μ ノ点トスル. 而シテ無限行列ヲ $\alpha = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots \end{pmatrix}$ トスルトキ (1)ヲ $\alpha y = \beta$ ト書クコトニスル.

今 α ニ於テ, 各行 (a_{i1}, a_{i2}, \dots) ヲ座標トスル点ハ λ ノ共軛空間 (dual) λ^* ノ点トシ. α ノ第 n_i 截片ヲ

$$\alpha_{n_i} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in_i} & 0 \\ & & \dots & & \\ \hline a_{n_i 1} & a_{n_i 2} & \dots & a_{n_i n_i} & 0 \end{array} \right) \text{トスル.}$$

但 $\{n_i\}$ ハ $\{n\}$ ノ部分列トスル.

又 β ノ第 n_i 截片ヲ $\beta_{n_i} = (x_1, x_2, \dots, x_{n_i}, 0, 0, \dots)$ トスル. α_{n_i} ノ行列式 $|\alpha_{n_i}| \neq 0$ ($i=1, 2, \dots$) ナルトキハ $\alpha_{n_i} y = \beta_{n_i}$ ノ解 $y^{(n_i)} = (y_1^{(n_i)}, y_2^{(n_i)}, \dots, y_{n_i}^{(n_i)}, 0, 0, \dots)$ ハ求メラレリ. 今点列 $\{y^{(n_i)}\}$ ノ部分列 $\{y^{(n_j)}\}$ ガアツテ, ソノ各座標ノ極限值即チ $\lim_{j \rightarrow \infty} y_k^{(n_j)} = y_k$ ($k=1, 2, \dots$)トスルトキ点 (y_1, y_2, \dots) ガ λ ノ点ヲ成ツテ而シテ方程式 (1)ヲ満足スルトキ (1)ハ截片方法デ解ケルト云フコトニスル.

【定理1】 線状座標空間 λ ハ局所弱コンパクトトシ, μ ハ任意ノ線状座標空間トスル $|\alpha_{n_i}| = 0, n_i \rightarrow \infty$ (但シ $\{n_i\}$ ハ $\{n\}$ ノ部分列トスル)

ニシテ、 α_{n_i} 逆行列ヲ $\alpha_{n_i}^{-1}$ トスルトキ $\{\alpha_{n_i}^{-1} \beta\}$ ガ空間 λ ノ *beschränkt* (有界) ナ点列デアル如キ任意ノ $\beta \in \mu$ ニ對シテ $\alpha \gamma = \beta$ ノ解 $\gamma \in \lambda$ ハ截片方法デ求メラレル。

[証明] $\{\alpha_{n_i}^{-1} \beta\}$ ハ λ ノ *beschränkt* ナ点列デアルカラ、 λ ノ局所弱コンパクト性カラ、 $\{\alpha_{n_i}^{-1} \beta\}$ ノ部分列ガ存在シテ λ ノ点 $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots)$ ニ弱收斂スル。初メカラ $\{\alpha_{n_i}^{-1} \beta\}$ ガ γ ニ弱収斂スルトンテ推支ヘナイ。今 $\alpha_{n_i}^{-1} \beta = \gamma^{(n_i)} = (\gamma_1^{(n_i)}, \gamma_2^{(n_i)}, \dots, \gamma_{n_i}^{(n_i)}, 0, 0, \dots)$ トスレバ、点列 $\{\alpha_{n_i}^{-1} \beta\}$ ガ γ ニ弱収斂スルカラ $\lim_{n_i \rightarrow \infty} \gamma_k^{(n_i)} = \gamma_k$ ($k=1, 2, \dots$) 兩シテ $\beta = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ トスレバ、

$$\begin{cases} \alpha_{n_i 1} \gamma_1^{(n_i)} + \alpha_{n_i 2} \gamma_2^{(n_i)} + \dots + \alpha_{n_i n_i} \gamma_{n_i}^{(n_i)} = \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_{n_i i} \gamma_1^{(n_i)} + \alpha_{n_i 2} \gamma_2^{(n_i)} + \dots + \alpha_{n_i n_i} \gamma_{n_i}^{(n_i)} = \alpha_{n_i} \quad (i=1, 2, \dots) \end{cases}$$

α ノ第 l 行ヲ座標トスル点ヲ $\check{\alpha}_l = (\alpha_{l1}, \alpha_{l2}, \dots)$ トスレバ

$$\check{\alpha}_l \gamma^{(n_i)} = \alpha_l \quad \text{且ツ} \quad \check{\alpha}_l \in \lambda^* \text{デアル。}$$

$$\therefore \check{\alpha}_l \gamma = \alpha_l \quad (l=1, 2, \dots)$$

$$\therefore \alpha \gamma = \beta \quad \text{[証明終]}$$

次ニ 空間 λ ガ特ニ空間 ω (即チ各座標ハ任意ノ数トスル点ヨリナル空間)ノトモハ [定理] 1ノ條件ハ又必要條件トナルコトガ云ハル。即チ

[定理] 2. α ノ l 行ヲ座標トスル点ハ ω ノ共軛空間 ω^* ノ点(即チ有限個ノ座標ノミガ0デナイ)トスル。 $|\alpha_{n_i}| \neq 0$ ($n_i \rightarrow \infty$)ガ成立スルトキハ方程式 $\alpha \gamma = \beta$, $\beta \in \mu$ ノ解 $\gamma \in \omega$ ガ截片方法デ求メラレルタメノ必要且ツ十分ナル條件ハ $\{\alpha_{n_i}^{-1} \beta\}$ ガ *beschränkt* ナ部分列ヲ持ツコトデアル。(勿論 ω ノ点列トシテデアル)

[証明] 十分ナルコト。空間 ω ノ局所弱コンパクトデアル³⁾カラ [定理] 1ヨリ明カデアル。

1) F. Riesz; *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues* P. 23

2) G. Köthe, O. Toeplitz; *Journ. für Math.* 171 (1934) P. 193-226

3) G. Köthe; *Math. Ann.* 114 (1937) p. 105

ニシテ、 α_{n_i} 逆行列ヲ $\alpha_{n_i}^{-1}$ トスルトキ $\{\alpha_{n_i}^{-1} \beta\}$ ガ空間 λ ノ *beschränkt* (有界) ナ点列デアル如キ任意ノ $\beta \in \mu$ ニ對シテ $\alpha \gamma = \beta$ ノ解 $\gamma \in \lambda$ ハ截片方法ヲ求メラレル。

[証明] $\{\alpha_{n_i}^{-1} \beta\}$ ハ λ ノ *beschränkt* ナ点列デアルカラ、 λ ノ局所弱コンパクト性カラ、 $\{\alpha_{n_i}^{-1} \beta\}$ ノ部分列ガ存在シテ λ ノ点 $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots)$ ニ弱収斂スル。初メカラ $\{\alpha_{n_i}^{-1} \beta\}$ ガ γ ニ弱収斂スルトシテ無支ヘナイ。今 $\alpha_{n_i}^{-1} \beta = \gamma^{(n_i)} = (\gamma_1^{(n_i)}, \gamma_2^{(n_i)}, \dots, \gamma_{n_i}^{(n_i)}, 0, 0, \dots)$ トスレバ、点列 $\{\alpha_{n_i}^{-1} \beta\}$ ガ γ ニ弱収斂スルカラ $\lim_{n_i \rightarrow \infty} \gamma_k^{(n_i)} = \gamma_k$ ($k=1, 2, \dots$) 而シテ $\beta = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ トスレバ、

$$\begin{cases} \alpha_{n_i 1} \gamma_1^{(n_i)} + \alpha_{n_i 2} \gamma_2^{(n_i)} + \dots + \alpha_{n_i n_i} \gamma_{n_i}^{(n_i)} = \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_{n_i 1} \gamma_1^{(n_i)} + \alpha_{n_i 2} \gamma_2^{(n_i)} + \dots + \alpha_{n_i n_i} \gamma_{n_i}^{(n_i)} = \alpha_{n_i} \quad (i=1, 2, \dots) \end{cases}$$

α ノ第 l 行ヲ座標トスル点ヲ $\check{\alpha}_l = (\alpha_{l1}, \alpha_{l2}, \dots)$ トスレバ

$$\check{\alpha}_l \gamma^{(n_i)} = \alpha_l \quad \text{且ツ} \quad \check{\alpha}_l \in \lambda^* \text{ デアル。}$$

$$\therefore \check{\alpha}_l \gamma = \alpha_l \quad (l=1, 2, \dots)$$

$$\therefore \alpha \gamma = \beta \quad \text{[証明終]}$$

次ニ 空間 λ ガ特ニ空間 ω (即チ各座標ハ任意ノ数トスル点ヨリナル空間) ノトモハ [定理] 1 ノ條件ハ又必要條件トナルコトガ云ハル。即チ

[定理] 2. α ノ l 行ヲ座標トスル点ハ ω ノ共軛空間 ω^* ノ点 (即チ有限個ノ座標ノミガ 0 デナイ) トスル。 $|\alpha_{n_i}| \neq 0$ ($n_i \rightarrow \infty$) ガ成立スルトキハ方程式 $\alpha \gamma = \beta$, $\beta \in \mu$ ノ解 $\gamma \in \omega$ ガ截片方法ヲ求メラレルタメノ必要且ツ十分ナル條件ハ $\{\alpha_{n_i}^{-1} \beta\}$ ガ *beschränkt* ナ部分列ヲ持ツコトデアル。(勿論 ω ノ点列トシテデアル)

[証明] 十分ナルコト。空間 ω ノ局所弱コンパクトデアル³⁾ カラ [定理] 1 ヨリ明クデアル。

1) F. Riesz; *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues* P. 23

2) G. Köthe, O. Toeplitz; *Journ. für Math.* 171 (1934) P. 193-226

3) G. Köthe; *Math. Ann.* 114 (1937) p. 105

必要ナルコト 試行方法ヲ解ガ求メラレルトスル。クルトキハ $\{n_i\}$ ノ部分列 $\{n_j\}$ が存在シテ、 $\{\alpha_{n_j}^{-1} \beta\}$ が $n_j \rightarrow \infty$ ノトキ、座標的ニ ω ノ点ニ收敛スル。然ルニ ω ニ於テハ座標的ニ收敛スルコトト弱收敛スルコトハ同値デアレコトハ容易ニ証明サレル。故ニ $\{\alpha_{n_j}^{-1} \beta\}$ ハ *beschränkt* ⁽⁴⁾ デアル

[証終]