111.　群の公理について

神戸工専　橋本純次 (1948.7.29)

群の四公理のうちで、単位元及び逆元の存在は割算の見地から見ると、a/e

が存在してaに等しいこと及び e/aが存在することと考へられる。ここで述べようとするのは、上のa/eが一意的に存在するだけで十分で aに等しいといふことが essential に必要ではないといふことである。

【定理】 集合G $(a,\ b,\ c\ \cdots\cdots)$は次の性質が満されるなら群である。

1. ab がGの元とし一意に存在する。
2. $(ab)c=a(bc)$
3. 任意のaに対して $fa^*=a$なる a^* が唯一つGの中に存在するやうなaに無関係な元fが少くも一つ存在する。
4. 任意のa及び上のfに対して $a'a=f$ なる元 a' が少くも一つ存在する。

(注意) $a^*=a$としたのが普通の公理であつて、これはそれを要求しないだけ寛大になつてゐる。

【証明】 左單位元の存在。 4から $ef=f$ なる e が存在する。

$$ea=e(fa^*)=(ef)a^*=fa^*=a.$$

左逆元の存在。 4から $f'e=f,\quad e'f'=f$

3から $ff''=e'$ なる $f'\ e'\ f''$ が存在する。

$$f(f''a'a)=(ff'')(a'a)=ef=e'(f'e)=(e'f')e=fe.$$

3に於ける a^* の一意性から

$$(f''a')a=e \qquad \text{(終)}$$

なほ Gが有限群のときは a^* の一意性を3から除くことができるのは容易に分る。