107 下半もぢゅS群ニツイテ II

（名大） 伊藤 昇

○ 訂正 下半もぢゅS群ニツイテノ定理4及ビソノ系ハ全然思イ違イデシタカラ取消シマス。（阪大寺坂氏ノ御注意ニヨル） シタガッテ conformal ナ群ハ何時下半もぢゅS群ニナルデアロウカトイフ問ガ出テ来ルワケデスガ、ソレガ一般ノ場合ニハ上手イ条件ガ見ツカラナイノデ唯特別ノ場合ダケシカ述ベラレナイノハ残念デス。

1. Conformal ナ群ハ勿論可解群デアリ又巾零群ハ下半もぢゅS群デスカラ、我々ハ巾零群デナイ可解群ニ興味ヲ持チマス。簡単ノ為ソノ様ナ群ヲ以上S群ト略称シマス。S群ニ対シテ次ノ概念ヲ導入シマス。

［定義］ 1-family ノS群トハスベテノ真部分群ガ巾零ナルモノヲ言ウ。family K ノS群トハ極大部分群ガ巾零群ナルカ又ハ高々 family K-1 ノS群デ且少ナクトモ一ツノ極大部分群ハ丁度 family K-1 ナルモノヲイフ。

family 1 ノS群ノ構造ハ良ク知ラレテ居リマス（K. Iwasawa [1]）。ソレヲ使エバ induction デ次ノ定理ハ直チニ証明サレマス！

［定理 1］ family K ノS群ノ位数ハ相異ナル素因数ヲ高々 K＋1 個シカ有シナイ。

［証明］ $K=1$ ナル時ハ[1]ニヨッテ保証サレマス。ソコデ若シソノ様ナ群ガ $K+r$, $r\geqq 2$ 個ノ相異ナル素因数ヲ有スレバ即チ $g=p_1^{e_1}\cdots p_{k+r}^{e_{k+r}}$ ナラバ、

$\mathfrak{G}/p_i^{e_i}$ ナル位数ノ部分群ハ存在スルガ (P. Hall) ソノ中ニS群ナルモノガアル ソレハ family＜K ダカラ induction ニヨリ高々 $(K-1)+1=K$ 個シカ相異ナル素因数ヲ有シナイ.

[Koliankowsky [2] ノ非可解群ニ関スル結果ハS群ノ場合ニモ大体成立シマスガ (定理1カラスグワカリマス) ソノ仕方ハ直交的デス.

S群 $\mathfrak{G}$ ノ位数ガ n 個ノ相異ナル素因数ヲ有スレバソノ family $\geqq n-1$ 即チ $\mathfrak{G}$ ハ本質的ナ非巾零項ヲ少クトモ n-2 個有スル.

サテ [1] ニヨレバ family 1 ノS群ノ位数ハ丁度2個ノ相異ナル素因数ヲ有シマスカラ定理1ニ基ヅイテ次ノ概念ヲ導入シマス.

[定義2] family K ノS群デソノ位数ガ相異ナル素因数ヲ丁度 K+1 個有スルモノヲ regular ナS群ト言ウ.

一方 O. Ore [3] ハ 位数 $g=p_1^{e_1}\cdots p_r^{e_r}$ $p_1>\cdots>p_r$ ナル群 $\mathfrak{G}$ ガ 位数 $h_i=p_1^{e_1}\cdots p_i^{e_i}$ $(i=1,2,\ldots)$ ナル正規部分群 $\mathfrak{H}_i$ ヲ有スル時 dispersible ト言ッテ居リマスガ ソレヲ少シク拡ゲテ

[定義3] $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}$ ヲ一ツノ置換トシマストキニ $j_1, j_2, \ldots$ ノ意味デ dispersible デアル場合ニソノ様ナ $\mathfrak{G}$ ノコトヲ generalized dispersible ト呼ビマス.

ソウシマスト

[定理2] regular ナS群ハ generalized dispersible デアル.

[証明] K=1 ナル時ハ [1] ニヨレバ正シイ $\mathfrak{G}$ ガ素数指数 p_i ノ正規部分群 $\mathfrak{H}$ ヲ有スルコトハ自明デスガ. コヽデ $e_i=1$ ナラバ $\mathfrak{H}$ ハ巾零群ナルカ又ハ family K−1 ノS群デアリ 又 $e_i \geqq 2$ ナラバ $\mathfrak{H}$ ハ巾零群デスカラ induction ニヨッテ定理ハ証明サレタ訳デス.

サラニ

[定理3] regular ナS群デハ少クトモ一ツ $N_p \neq \mathfrak{G}$ ナル如キ巡回群デアル S_p ガ存在スル.

[証明] K=1 ナル時ハ [1] ニヨル. サテ $p_i^{e_i}\,p_j^{e_j}$ $(i\neq j)$ ナル位数ノ部分群ノウチS群デアルモノハ存在シマスガ、ソレガ若シ family 1 ナラ定理ハ成立シ、

ソウテナケレバ $\mathfrak{G}$ ハ少クトモ family K+1 トナッテ仮定ニ反シマス.

2 以下 conformal ナ S群ヲ考ヘ. ソレヲ CS群ト略記シマス. 記号" 下半もぢゅS群ニツイテ. ノ定理 1.2 3 ハ conformal ナ群ニツイテ成立スルモノデス. 尚 [3] 参照.

最初ニ family $\leqq 1$ ノ CS群ノ構造ヲシラベマス.

[定理 4] family 1 ノ CS群 $\mathfrak{G}$ ハ次ノ構造ヲ有シ 逆ニソノ様ナモノハ又 family 1 ノ CS群ニナリマス. ソノ位数ヲ g トスレバ $g=pq^{\beta}$, $p>q$. $\mathfrak{G} \triangleright S_p$ $N_0=S_q=\{Q\}$. $S_p \times \{Q^q\}$.

即チソノ様ナ群ハ所謂 type A ノ群ニナリマス. G. Miller-H. Moreno [4]

[証明] 必要ナダケヤツテ置キマス. [1] ニヨレバ family 1 ノ S群ハ次ノ構造ヲ有シマス. $g=p^{\alpha}q^{\beta}$, $\mathfrak{G} \triangleright S_p$. $S_p=\{Q\}<\mathfrak{G}$. $S_p \times \{Q^2\}$. $\mathfrak{G}/S_p'$ type A. $S_p \times S_q$. conformal ノ仮定カラ $p>q$ トナリマス. サテ [5] ニヨレバ S_p/S_p' ハ $\mathfrak{G}/S_p'$ ノ極小正規部分群ニナリマスガ conformal ノ仮定ノ下デハ S_p/S_p' ノ位数ハ p デナケレバナリマセンガ、ソレハ結局 $\alpha=1$ ナルコトヲ示シマス、

サテニソレハ下半もぢゅS群デモアリマス. 即チ family 1 ノ S群デハ conformal ナラバ下半もぢゅS群デアリマス.

定理4カラ induction デ

[定理5] family K ノ CS群 $\mathfrak{G}$ ソノ位数ヲ $g=p_1^{e_1}\cdots p_n^{e_n}$, $p_1>\cdots>p_n$ トスレバ $e_1 \leqq K$.

[証明] $K=1$ ノ時ハヨイカラ $K>1$ トシ $K-1 \Rightarrow K$ ヲ証明スル. 極大部分群ノ中ニ family $K-1$ ノモノガアル. ソノ位数ハ g/p_i デスガ $i=1$ ナラ induction デ $e_1-1 \leqq K-1$, $i \neq 1$ ナラ $e_1 \leqq K-1$

サテニ regular ノ仮定ヲ入レル時 induction ヲ使ウ為ニ先ツ.

[定理 6] regular ナ CS群ノ S部分群ハ regular デアル.

[証明] $K=1$ ナラ自明. 極大部分群ノ位数ハ g/p_i デスカラ $e_i>1$ ナラソレハ巾零群 $e_i=1$ ノ時 巾零群デナケレバ、ソレハ family $K-1$ デスカラ regular. 以上、定理6ニ基ヅイテ

[定理7] regular ナCS群デハ S_p ∀ 巡回群デアル 従ツテ metacyclic ニナリマス. [逆ニ S_p ∀ cyclic ナラバ dispensible ニナッマス]

[証明] 極大部分群ノナカニ family K−1ノモノガ存在スル. ソノ位数 g/p_i ソノトキ $e_i = 1$ トナルカラ定理ハ induction デ成立スル.

[定理8] regular ナCS群デハ $e_i = 1$ デアル.

[証明] 極大部分群ノナカニ family K!ノモノガアル ソノ位数 g/p_i ソノトキ $e_i = 1$ ダカラ $c = 1$ ナラヨイ. ソウデナケレバ induction ガキク.

[定理9] regular ナCS群デハ各々1ツノ S_i ヲ除イテハ $S_K^2 1 = P_K$

[証明] 極大部分群ノナカニ family K−1ノモノガアル. ソノ位数 g/p_i, ソノトキ $e_i = 1$ ダカラ induction ガキク 最後ニ

[定理10] Z_∞ ヲ $\mathfrak{G}$ ノ超中心即チ昇中心列ノ終点トスレバ $\mathfrak{G}/Z_\infty$ ガ conformal ナコトト $\mathfrak{G}$ ガ conformal ナコトハ等シイ.

[証明] $\mathfrak{G}/Z_1$ ガ conformal ナラ $\mathfrak{G}$ ガ conformal ヲ言エバヨイ. $\mathfrak{G} \rhd \mathfrak{M}$ トスレバ $\mathfrak{M} > Z_1$ ナラ仮定ガキキ $\mathfrak{M} \not> Z_1$ ナラ $\mathfrak{G} \rhd \mathfrak{M}$ トナル. アトハ induction.

[定理11] 中心ヲ有シナイCS群 $\mathfrak{G}$ ガ family K ナラ. ソノ位数 q ノ素因子ノ個数ハ $\rho(q) = K+1$.

[証明] K=1ナラヨイ 定理ヲ否定スレバ1ト異ナル正規部分群ノ中心ハキ1ト ナル ソウスルト $\mathfrak{G} = S_1M_1$ $S_1 \cap M_1 = 1$, M_1 ノ中心ヲ $\mathfrak{z}$ トシ. 又 $\mathfrak{z}_1$ ノ素数位数ノ部分群ヲ一ツトツテソレヲ R トスレバ S_1R ハ S群, サラニコレガ family 1ナラ $e_1 = 1$ ソウデナケレバ family 1ノ部分群ヲトレバ ソノ位数ハ p_1p_i デアル ソウスルト $\mathfrak{G}$, family ハ $K = \rho(q) - 1$ デナケレバナラヌガ 仮定カラ $\rho(q) \geq K+2$, コレハ矛盾.

[定理12] 定理11ノ群ガ regular ナラバ $g = p_1 \cdots p_r$.

3. 以下、下半もぢゅS群ヲ考察シマス。最初ニ定理10ト同様ニ、

[定理13] CS群 $\mathfrak{G}$ ガ下半もぢゅS群ナルタメノ必充条件ハ $\mathfrak{G}/Z_\infty$ ガ下半もぢゅS群ナルコトデアル。

[証明] $\mathfrak{G}/Z_1$ 下半もぢゅSナラ $\mathfrak{G}$ 下半もぢゅSサエ言エバヨイ。induction

ヲ使エバ 極大部分群ニツイテヤレバヨイ. 更ニ $\mathfrak{G}$ ノ位数ニツイテノ induction ヲ使ウ $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ トシ, $\mathfrak{M}_1$ ハ $\mathfrak{M}_2$ ガソレラノ極大部分群ナルコトヲ言エバヨイガ [3] ニヨレバ $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_1^x$ トシテヨイ. $\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{Z}_1$ ナラ明白デアリ. $\mathfrak{M}_1 \not\supset \mathfrak{Z}_1$ ナラ $\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{G}$ トナル.

ソコデ定理11ノ群ニツイテ下半もぢゅSナル爲ノ必充條件ヲ求メレバヨイノデスガ今ノ所ー寸分リマセンノデス. 結局前定理ニ於ケル如ク部分群ノ共範ナ極大部分群ノ二ツヲ取レバ ソレラノ共通部分ガソレラノ極大部分群ニナル爲ノ必充條件ヲ求メレバヨイノデスガ. 唯定理12ノ群ニツイテハ

[定理14] 定理12ノ群ガ下半もぢゅS群ナル爲ノ必充條件ハ V_i ニ對シテ丁度一ツノ j_i; $i<j_i$ ガ存在シテ $V P_i P_{j_i}$ ナル位数ノ部分群ガS群ニナルコトデアル.

ソノ j_i ニ對シテダケ

[証明] 必要: ソウデナケレバ, $P_i P_{j_{i1}} P_{j_{i2}}$ $i<j_{i1}<j_{i2}$ ナル位数ノ部分群ヲ考ヘ $S_i, S_{j_{i1}}, S_{j_{i2}}$ ノ生成元ヲ適当ニ $\{A\}$ $\{B\}$ $\{C\}$ ト取レバ $\{B,C\}A$ $\{B^A\ C^A\}=1$ トナリマス.

充分. 極大部分群ニツイテノミ見レバヨイガ, ソレモ明白デアリマセウ.

サラニスグ分ルコトハ

[定理15] 定理11ノ群デソノ位数ガ $q=pq^{\beta}$ ナルモノガ下半もぢゅSデアル爲ノ必要條件ハ $\beta=1$ ナルコトデアル.

アトハ暗面的ニナル許リデス.

以上

[1] Proc. Phy.-Mat Soc. 1941

[2] Sbornik 1946

[3] Duke. 1939

[4] Transaction 1903