106　環ノ右いでやる束

（廣島文理大）　前田 文友

§1 始ニ上連続束ノ定義及ビ二三ノ性質ヲ述ベル.

<u>定義 1.1</u>　完備束 L ニ於テ有向集合 D ノ元 δ ヲ添字ニモツ L ノ元ノ集合 $(a_\delta ; \delta \in D)$ ガアルトキ. 任意ノ元 $b \in L$ ニ対シテ

$$a_\delta \uparrow a \quad ナラバ \quad a_\delta \cap b \uparrow a \cap b$$

ガ成立スルトキ L ヲ<u>上連続束</u>トイウ. 双対的ニ下連続束ヲ定義シ, 上連続ニシテ下連続ナル束ヲ<u>連続束</u>トイウ

（コノ連続束ノ定義ガ J. v. Neumann ノ連続幾何学ニ用イタモノト同様デアルコトハ 本誌佐々木右左氏 "連続幾何学ノ公理ニツイテ" 参照）

<u>補題 1.1</u>　上連続束 L ニ於テ $S \subseteq L$ ナルトキ. S ノ任意ノ有限部分集合 ν ニ対シテ. $\quad \vee(a; a \in \nu) \cap b = 0$ ナラバ $\vee(a; a \in S) \cap b = 0$ デアル.

（証）　S ノ有限部分集合 ν ノ全体 D ハ集合論的包含ヲ順序トシテ有向集合デアル. $s_\nu = \vee(a; a \in \nu)$. $s = \vee(a; a \in S)$ トオケバ, $s_\nu \uparrow s$ デアル. シカルニ仮定ニヨリ $s_\nu \cap b = 0$. $s_\nu \cap b \uparrow s \cap b$ デアルカラ. $s \cap b = 0$ デアル.

<u>定義 1.2</u>　完備束 L ノ部分集合 S ガアルトキ. S ノ共通部分ヲモタナイ任意ノ部分集合 S_1, S_2 ニツイテ $\vee(a; a \in S_1) \cap \vee(a; a \in S_2) = 0$ ナルトキ. S ハ<u>独立系</u>デアルトイイ. $(S)\perp$ デアラワス.

Sガ独立系ナルトキ $V(a; a\in S)$ ヲ $V(\oplus a; a\in S)$ デアラワス

表現__ 上連続束ニ於テ、Sガ独立系ナルタメノ必要ニシテ充分ナル條件ハ、Sノスベテノ有限部分集合ガ独立系デアルコトデアル。

(証) 必要ナコトハ明カデアル。次ニSノスベテノ有限部分集合ノガ独立系デアルトスル。S_1, S_2 ヲSノ共通要素ヲモクナイ任意ノ部分集合トシ、ν_1, ν_2 ヲ夫々 S_1, S_2 ノ任意ノ有限部分集合トスルトキハ 仮定ニヨリ $\nu_1 \cap \nu_2$ ハ独立系デアルカラ

$$V(a; a\in \nu_1) \wedge V(a; a\in \nu_2) = 0$$

コレハ S_2 ノ任意ノ有限部分集合 ν_2 ニ対シテ成立スルカラ 補題1.1ヨリ

$$V(a; a\in \nu_1) \wedge V(a; a\in S_2) = 0.$$

コレハヌS ノ任意ノ有限部分集合 ν_1 ニ対シテ成立スルカラ

$$V(a; a\in S_1) \wedge V(a; a\in S_2) = 0.$$

従ッテSハ独立系デアル。

__補題1.2__ 上連続可補模束ニ於テ $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_i \leqq \cdots\cdots$ ナルトキ

$$a_i = a_{i-1} \oplus b_i \quad (i = 1.2.\cdots) \qquad (\text{但シ } a_0 = 0)$$

トオケバ $\bigvee_{1\leqq i<\infty} a_i = \bigvee_{1\leqq i<\infty} \oplus b_i$ デアル。

(証) $i \leqq j$ ナラバ $b_i \leqq a_i \leqq a_j$ ナレバ $(b_1 \vee \cdots\cdots \vee b_{j-1}) \wedge b_j \leqq a_{j-1} \wedge b_j = 0$.

故ニ $(b_1, \cdots\cdots, b_n)\perp$ 従ッテ定理1.1ヨリ $(b_i; i = 1.2\cdots)\perp$

$\bigvee_{1\leqq i<\infty} a_i = \bigvee_{1\leqq i<\infty} b_i$ ハ明カデアル。

__補題1.3__ 上連続ニ於テ $a_\delta \uparrow a$ $b_\delta \uparrow b$ ナラバ $a_\delta \wedge b_\delta \uparrow a \wedge b$ デアル。

[証] $V(a_\delta \wedge b_\delta; \delta\in D) \geqq V(a_\delta \wedge b_\gamma; \gamma\in D) = a_\delta \wedge b$ ナレバ

$$V(a_\delta \wedge b_\delta; \delta\in D) \geqq V(a_\delta \wedge b, \delta\in D) = a \wedge b.$$

他方 $V(a_\delta \wedge b_\delta; \delta\in D) \leqq a \wedge b$ ナレバ $V(a_\delta \wedge b_\delta : \delta\in D) = a \wedge b$

__定理1.2__ 連続束Lノ中心ZハLノ部分束トシテ完備ぶーる束デアル。

[証] 中山正氏束論I P.15ヨリLノ中心ZハLノ部分束トシテぶーる束デアル。

$S \leqq Z$ ナルトキ ν ヲSノ任意ノ有限部分集合トシ、$z_\nu = V(z, z\in \nu)$

$a = V(z, z\in S)$ トスレバ、$z_\nu \uparrow a$ デアル。$x, y \in L$ ニ對シテ

$$(x \wedge y) \vee z_\nu = (x \vee z_\nu) \wedge (y \vee z_\nu)$$

ナレバ、補題1.3ヨリ $(x, y) \vee a = (x \vee a) \wedge (y \vee a)$ 他ノ分配式モ同様ニ成立ス

ルカラ aハ中立元デアル.

Z_νノ補元ヲZ_ν'トシ $Z_\nu' \downarrow b$トスレバ, $1=Z_\nu \cup Z_\nu' \leqq a \cup Z_\nu'$ ナレバ $1=a\cup b$. $0=Z_\nu \cap Z_\nu' \geqq Z_\nu \cap b$ ナレバ $0=a\cap b$. 故ニ aハ補元ヲモツカラ中心元デアル.

同様ニ $\bigwedge(z;z\in S)$モ中心元デアル. 従ッテZハLノ部分束トシテ完備ブール束デアル.

§2 次ニ環Rノ右イデヤル束ニツイテ考ヘル. Rハ単位元1ヲモツトハ限ラナイ.

<u>定理2.1</u> 環Rノ右イデヤル全体$R_\mathfrak{r}$ハ集合論的包含ヲ順序トシテ上連続模束デアル. コノトキ, Sヲ$R_\mathfrak{r}$ノ任意ノ部分集合トスルトキハ $\bigvee(\mathfrak{a};\mathfrak{a}\in S)$ハ, Sノ中ノ有限個ノ右イデヤル ($\mathfrak{a}_i$ $i=1,2,\cdots,n$)ヲトッテ $\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$ ($\alpha_i\in\mathfrak{a}_i$)ノ如クアラワサレルαノ全体デアリ, $\bigwedge(\mathfrak{a};\mathfrak{a}\in S)$ハSニ属スルスベテノ右イデヤルニ共通ナ元ノ全体デアル.

〔証〕 上記ノ関係ニヨリ$R_\mathfrak{r}$ガ完備束ヲ作ルコトハ明カデアリ, 又$R_\mathfrak{r}$ガ模束ナルコトモヨク知ラレテイル. 次ニ $\mathfrak{a}_\delta\uparrow\mathfrak{a}$ ナルトキ $\alpha\in\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ トスレバ, $\alpha=\alpha_{\delta_1}+\cdots+\alpha_{\delta_n}$ ナルδ_i ($i=1,\cdots,n$)ガ存在スル. $\delta_i\leqq\delta_0$ ($i=1,\cdots,n$)ナルδ_0ヲトレバ, $\alpha\in\mathfrak{a}_{\delta_0}$ 他方 $\alpha\in\mathfrak{b}$ナレバ, $\alpha\in\mathfrak{a}_{\delta_0}\cap\mathfrak{b}$. 故ニ $\bigvee(\mathfrak{a}_\delta\cap\mathfrak{b};\delta\in D)=\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$. 即チ $\mathfrak{a}_\delta\cap\mathfrak{b}\uparrow\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$.

<u>定理2.2</u> $R_\mathfrak{r}$ニ於テ $\mathfrak{a}=\bigvee(\mathfrak{a}_\lambda;\lambda\in I)$ ナルトキ, $\mathfrak{a}$ノ任意ノ元αガ

$$\alpha=\alpha_1+\cdots\cdots+\alpha_n\quad(\alpha_i\in\mathfrak{a}_{\lambda_i})$$

ノ如ク一意的ニアラワサレルタメニ必要ニシテ充分ナル条件ハ$(\mathfrak{a}_\lambda;\lambda\in I)\perp$ナルコトデアル.

(証) (i) 必要 ν_1,ν_2 ヲIノ共通部分ヲモタナイ任意ノ有限部分集合トスレバ. $\bigvee(\mathfrak{a}_\lambda;\lambda\in\nu_1)\cap\bigvee(\mathfrak{a}_\lambda;\lambda\in\nu_2)=(0)$ デアル. 故ニ定理1.1ヨリ $(\mathfrak{a}_\lambda;\lambda\in I)\perp$デアル

(ii) 充分 $\mathfrak{a}$ノ元αガ

$$\alpha=\alpha_1+\cdots+\alpha_n=\beta_1+\cdots+\beta_n\quad(\alpha_i,\beta_i\in\mathfrak{a}_{\lambda_i})$$

ノ如クアラワサレタトスル (但シα_i,β_iノ中ニハ0デアルモノモアル) シカルトキハ

$$\beta_1-\alpha_1=(\alpha_2-\beta_2)+\cdots\cdots+(\alpha_n-\beta_n)$$

左辺ハ $\mathfrak{a}_{\lambda_1}$ ニ属ノ．右辺ハ $\mathfrak{a}_{\lambda_2}\vee\cdots\vee\mathfrak{a}_{\lambda_n}$ ニ属スル．故ニ独立性カラ

$\beta_1-\alpha_1=0$

同様ニ $\alpha_i=\beta_i \quad (i=2,\cdots,n)$

<u>定義2.1</u> ε ヲ環 R ノ冪等元トスルトキ．ε デ生成サレタ右いでやるヲ $(\varepsilon)_r$ デアラワス．同様ニ左いでやる $(\varepsilon)_l$ ヲ定義スル．$(\varepsilon)_r=\{\xi;\ \xi=\varepsilon\xi,\ \xi\in\mathfrak{R}\}$ デアル．

<u>補題2.2</u> ε，η ヲ1ヲモツ環 $\mathfrak{R}$ ノ冪等元トスルトキ．$(\varepsilon)_r=(\eta)_r$ ナルタメノ必要ニシテ充分ナル條件ハ $\eta=\varepsilon+\varepsilon\chi(1-\varepsilon)$ ナル $\chi\in\mathfrak{R}$ ガ存在スルコトデアル．

〔証〕 V. Neumann 連続幾何学講義 II P.13 Lemma 2.7 ト同一

<u>定理2.3</u> ε ヲ環 $\mathfrak{R}$ ノ冪等元トスルトキ，$(\varepsilon)_r=V(\oplus\mathfrak{a}_\lambda;\ \lambda\in I)$ ナラバ．$\{\mathfrak{a}_\lambda;\ \lambda\in I\}$ ノ中有限個ノモノ例エバ $\mathfrak{a}_{\lambda_1}\cdots\ \mathfrak{a}_{\lambda_n}$ ヲ除イテハ (0) デアッテ $\mathfrak{a}_{\lambda_i}\ (i=1,\cdots,n)$ ニ對シテハ 次ノ性質ヲモツ冪等元 $\varepsilon_i\ (i=1,\cdots,n)$ ガ一意ニ定マル．

(1°) $\mathfrak{a}_{\lambda_i}=(\varepsilon_i)_r \quad (i=1,\cdots,n)$

(2°) $i\neq j$ ナラバ $\varepsilon_i\varepsilon_j=0$，$\varepsilon\varepsilon_i=\varepsilon_i\varepsilon=\varepsilon_i \quad (i=1,\cdots,n)$.

(3°) $\varepsilon=\varepsilon_1+\cdots\cdots+\varepsilon_n$.

(証) $\varepsilon\in V(\oplus\mathfrak{a}_\lambda;\ \lambda\in I)$ デアルカラ定理2.2ヨリ一意的ニ

$$\varepsilon=\varepsilon_1+\cdots\cdots+\varepsilon_n \qquad (\varepsilon_i\in\mathfrak{a}_{\lambda_i})$$

ナル $\varepsilon_i\ (i=1,\cdots,n)$ ガ定マル．周知ノ方法ニヨリ ε_i ハ冪等元デアッテ (1°) (2°) (3°) ヲ満足シ．$(\varepsilon)_r=\underset{1\leq i\leq n}{V\oplus}(\varepsilon_i)_r$ デアル．従ッテ $\{\mathfrak{a}_\lambda;\ \lambda\in I\}$ ノ中 $\mathfrak{a}_{\lambda_i}\ (i=1,\cdots n)$ 以外ノモノハ (0) デアル．

〔注意2.1〕 定理2.3カラ R ガ正則環デアルトキハ ソノ主右いでやる束 $\overline{R}_R$ ハ極大・極小條件ヲ充ストキ以外ハ．R_R ノ部分束トシテ完備束デナイコトガワカルナントナレバ．$\overline{R}_R$ ガ R_R ノ部分束トシテ完備束デアッテ 極大條件ヲ充サナイトスレバ．$\mathfrak{a}_1<\mathfrak{a}_2<\cdots$ ナル $\overline{R}_R$ ノ無限列ガ存在スル．$\overline{R}_R$ ハ上連続可補束デアルカラ補題1.2ヨリ $\underset{1\leq i<\infty}{V}\mathfrak{a}_i=\underset{1\leq i<\infty}{V\oplus}\mathfrak{b}_i$ ナル主右いでやる $\mathfrak{b}_i\ (i=1,2\cdots)$

ガ存在ス. $(\mathfrak{E})_J = \bigvee_{i \le k} \xi_i$ ナル冪等元 $\mathfrak{E}$ ガ存在スルカラ定理 2.3 ニ矛盾スル.
$\overline{R}_R$ ハ可補模束デアルカラ極大條件ヲ充セバ極小條件モ充ス.

J. v. Neumann ノ連續幾何学ノ講義 I ニ於テ 次數 $n \geqq 4$ ナル可補模束 L ハ正則環 R ノ主右イデヤル束 $\overline{R}_R$ ニヨッテ同型ニ表現サレルガ, コノトキ L ガ完備束ナラバ 一般ニハコノ完備性ハコノ同型表現ニヨッテ R_R ノ部分束トシテ $\overline{R}_R$ ニ於テハ保タレナイコトガ以上ノコトカラワカル.

§3. 次ニイデヤル束 R_R ノ中心ニツイテ考エル.

<u>定義 3.1</u> 環 R ノスベテノ元 ξ ニ對シテ $\alpha\xi = \xi\alpha$ ナルガ如キ R ノ元 α ノ全体 $\mathfrak{Z}$ ヲ R ノ<u>核心</u>トイウ. $\mathfrak{E}$ ヲ $\mathfrak{Z}$ ニ属スル冪等元トスレバ, $(\mathfrak{E})_J$ ハ両側イデヤルデ $(\mathfrak{E})_J = (\mathfrak{E})_L$ デアル. コレヲ $(\mathfrak{E})_Z$ デアラワス.

<u>定義 3.2</u> 環 R ノ部分環 $(R_\lambda;\ \lambda \in I)$ ガアッテ.

(1°) $\xi \in R$ ニ對シテ一意的ニ有限個ノ R_{λ_i} $(i = 1, \cdots, n)$ ノ元 ξ_i ガ定マリ

$$\xi = \xi_{\lambda_1} + \cdots + \xi_{\lambda_n}.$$

(2°) $\lambda \neq \mu$ ナルトキ $\xi \in R_\lambda$, $\zeta \in R_\mu$ ナラバ $\xi\zeta = \zeta\xi = 0$ ナルトキ R ハ $(R_\lambda,\ \lambda \in I)$ ノ<u>直和</u>デアルトイウ.

R ニハ (0) ト R トノ分解以外ニ直和分解ガ存在シナイトキハ R ハ<u>既約</u>デアルトイウ.

<u>定理 3.1</u> 環 R ガ $(R_\lambda;\ \lambda \in I)$ ノ直和デアルトキハ R_λ ハ R ノ両側イデヤルデアッテ, R_R ニ於テ

$$R = V(\oplus R_\lambda;\ \lambda \in I) \qquad (1)$$

デアル. 逆ニ両側イデヤル $(R_\lambda;\ \lambda \in I)$ ニ對シテ (1) ガ成立スルトキハ, R ハ $(R_\lambda;\ \lambda \in I)$ ノ直和デアル.

[証] (i) R ガ $(R_\lambda;\ \lambda \in I)$ ノ直和デアルトスル. $\xi \in R$ ナラバ

$$\xi = \xi_{\lambda_1} + \cdots + \xi_{\lambda_n}, \quad \xi_{\lambda_i} \in R_{\lambda_i} \ (i = 1, \cdots, n)$$

ノ如ク一意的ニアラワサレル. $\zeta \in R_\lambda$ トスレバ,

$$\zeta\xi = \begin{cases} \zeta\xi_{\lambda_i} & \lambda = \lambda_i \text{ ナルトキ} \\ 0 & \lambda \neq \lambda_i \text{ ナルトキ.} \end{cases}$$

故ニ $\zeta\xi \in R_\lambda$ ナレバ R_λ ハ右イデヤルデアル. 同様ニ R_λ ハ左イデヤルデア

ル. 定理2.2カラ $R_{\mathfrak{R}}$ ニ於テ $\mathfrak{R}=V(\xi\mathfrak{R}_\lambda;\lambda\in I)$ デアル

(ii) 逆ニ両側いでやる $(\mathfrak{R}_\lambda;\lambda\in I)$ ニ對シテ (1)ガ成立スルトキハ 定理2.2カラ. 定義3.2ノ(1°)ガ成立スル. 次ニ $\xi\in\mathfrak{R}_\lambda$ $\zeta\in\mathfrak{R}_\mu$ $(\lambda\neq\mu)$ ナラバ $\xi\zeta\in\mathfrak{R}_\lambda$, $\xi\zeta\in\mathfrak{R}_\mu$ ナレバ $\xi\zeta=0$. 同様ニ $\zeta\xi=0$.

〔注意3.1〕 定理2.3ヨリ環 $\mathfrak{R}$ ガ1ヲモツトキハ, $\mathfrak{R}$ ハ有限個ノ両側いでやるノ直和ニシカ分解デキナイ.

<u>定理3.2</u> 環Rガ1ヲモツトキハ Rノ右いでやる $\mathfrak{a}$ ニツイテ 次ノ三命題 (α) (β) (γ) ハ同等デアル.

(α) $\mathfrak{a}$ ハ $R_{\mathfrak{R}}$ ノ中心元デアル.

(β) $\mathfrak{R}$ ノ核心 $\mathfrak{Z}$ ニ属スル冪等元 ε ガアツテ $\mathfrak{a}=(\varepsilon)_r$ デアル.

(γ) $\mathfrak{a}$ ハ $R_{\mathfrak{R}}$ ニ於テ補元 $\mathfrak{a}'$ ヲモチ, $\mathfrak{R}=\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{a}'$ ハ $\mathfrak{R}$ ノ直和分解デアル.

コノトキ, $\mathfrak{a}=(\varepsilon)_r$ ナルガ如キ冪等元 ε ハ一意的ニ定マル.

〔証〕 (α)→(β): $\mathfrak{a}$ ガ $R_{\mathfrak{R}}$ ノ中心元ナルトキハ, $\mathfrak{a}$ ハ唯一ツノ補元 $\mathfrak{a}'$ ヲモチ. $\mathfrak{R}=\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{a}'$ デアル. 故ニ定理2.3ヨリ $\mathfrak{a}=(\varepsilon)_r$ ナルガ如キ冪等元 ε ガ一意的ニ定マル. 従ツテ補題2.1ヨリスベテノ $\chi\in\mathfrak{R}$ ニ對シテ $\varepsilon\chi(1-\varepsilon)=0$ デアル. 同様ニシテ $\mathfrak{a}'=(1-\varepsilon)_r$ ハ唯一ツノ補元ヲモツカラ, スベテノ $\chi\in\mathfrak{R}$ ニ對シテ $(1-\varepsilon)\chi\varepsilon=0$ デアル. 故ニスベテノ $\chi\in\mathfrak{R}$ ニ對シテ $\varepsilon\chi=\varepsilon\chi\varepsilon=\chi\varepsilon$ ナレバ $\varepsilon\in\mathfrak{Z}$ ニシテ カヽル ε ハ一意的ニ定マル.

(β)→(γ): 定理3.1ヨリ $\mathfrak{R}=(\varepsilon)_r\oplus(1-\varepsilon)_r$ ハ $\mathfrak{R}$ ノ直和分解デアル.

(γ)→(α): 定理3.1ヨリ $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ ハ両側いでやるデアツテ 定理2.3ヨリ $\mathfrak{a}=(\varepsilon)_r$, $\mathfrak{a}'=(1-\varepsilon)_r$ ナルガ如キ冪等元 ε ガ存在スル. $\mathfrak{b}$ ヲ任意ノ右いでやるトスレバ, $\alpha\in\mathfrak{b}$ ナルトキ, $\alpha=\alpha\varepsilon+\alpha(1-\varepsilon)$ ニ於テ $\alpha\varepsilon\in\mathfrak{b}$, $\alpha\varepsilon\in\mathfrak{a}$ ナレバ, $\alpha\varepsilon\in\mathfrak{b}\cap\mathfrak{a}$. 同様ニ $\alpha(1-\varepsilon)\in\mathfrak{b}\cap\mathfrak{a}'$. 故ニ $\mathfrak{b}=(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{a})\oplus(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{a}')$. 従ツテ $\mathfrak{a}$ ハ $R_{\mathfrak{R}}$ ノ中心元デアル. (s. Neumann 連続幾何学講義 I, P.8, Lemma 1.2ヨリ)

<u>定理3.3</u> 環 $\mathfrak{R}$ ガ1ヲモツトキ, 次ノ三命題(α), (β), (γ) ハ同等デアル.

(α) $\mathfrak{R}$ ハ既約デアル.

(β) $R_{\mathfrak{R}}$ ハ既約デアル.

(γ) $\mathfrak{R}$ ノ核心ニ属スル冪等元ハ0ト1トダケデアル.

【証】 定理3.2カラ明カデアル.

〔注意3.2〕 Rガ正則環ナルトキハ R_Rノ中心元ハ $\overline{R}_R$ノ中心元デアルカラ, 定理3.2, 定理3.3ニ於テ R_Rノ代リニ $\overline{R}_R$ヲオイタ定理ガ成立スル. コレラハ J. Neumann 連続幾何学講義 II p.12-14ニ出テイル.

〔注意3.3〕 注意2.1ト同様ナ理由デ, 環Rガ1ヲモツトキハ, R_Rノ中心Z_RガR_Rノ部分束トシテ完備束デアルナラバ, Z_Rハ極大極小条件ヲ充ス.

〔注意3.4〕 環Rガ1ヲモツトキ, 上連続束R_Rガ更ニ下連続束デアルナラバ定理1.2カラR_Rノ中心Z_RハR_Rノ部分束トシテ完備束デアルカラ, 注意3.3ヨリZ_Rハ極大極小条件ヲ充ス.