

105 次元論ニ就テ I

東京高師 森田 紀一 (9.10)

正統空間 R の開被覆 \mathcal{G} に対し \mathcal{H} の *open refinement* \mathcal{H} がアツテ、 \mathcal{H} が R の部分集合 A の開被覆ト思ルトキ ソノ次数が高々 $n+1$ デアル場合 (\mathcal{H}) - $\dim A \equiv n$ ト書ク。スハテノ有限被覆 \mathcal{G} に対し、 (\mathcal{G}) - $\dim R \leq n$ トナルコトカ即チ $\dim R \leq n$ ナルコトデアル。勿トシテ有限被覆ノミデナク アラユ *countable normal covering* ヲ考ヘ カール \mathcal{G} 二對シテ (\mathcal{G}) - $\dim R \leq n$ カ成立スルノハ、 $\dim R \leq n$ ノ場合ニ限ルコトハ既ニ証明サレタ處デ

アル。此處デハ \mathcal{U} が可算有限ノ被覆ノ場合ヲ考察シヨウ。

以下ニ於テ空間 R ハ常ニ正理空間デアルトスル。 R ニ於ケル集合系 $\{A_\alpha\}$ が可算有限デアルトハ R ノ任意ノ点 p ニ対シ。ソノ適当ナ近傍 $U(p)$ ヲトレバ、 $U(p) \cap A_\alpha \neq \emptyset$ ナル A_α ノ個數ガ有限ナルコトヲイフ。然ルトキハ次ノ補題ガ成立スル。

補題 1 R ノ局所有限ノ開被覆 $\mathcal{U} = \{G_\alpha; \alpha \in \Omega\}$ ニ對シ $F_\alpha \subset G_\alpha$, $\alpha \in \Omega$ ヲミタス閉集合系 $\mathcal{F} = \{F_\alpha; \alpha \in \Omega\}$ ガ存在スル。

補題 2 $\mathcal{U} = \{G_\alpha; \alpha \in \Omega\}$ ハ R ノ局所有限ノ開集合系。 $\mathcal{F} = \{F_\alpha; \alpha \in \Omega\}$ ハ閉集合系デ且ツ $F_\alpha \subset G_\alpha$, $\alpha \in \Omega$ トスル。スベテノ α ニ對スル binary covering $\{G_\alpha, R - F_\alpha\}$ ノ intersection ヲ \mathcal{U}' トスレバ、 \mathcal{U}' ハ局所有限ノ開被覆デアツテ且ツ $S(F_\alpha, \mathcal{U}') \subset G_\alpha$ ガ成立スル。

補題 3 \mathcal{U} ノ \mathcal{F} ハ補題 2ノ條件ヲミタス集合系トスレバ $F_\alpha \subset U_\alpha$, $\bar{U}_\alpha \subset G_\alpha$, $\alpha \in \Omega$ ヲミタス閉集合系 $\mathcal{U} = \{U_\alpha; \alpha \in \Omega\}$ ヲ適当ニ定メテ、 $\{\bar{U}_\alpha; \alpha \in \Omega\}$ トテ \mathcal{U} ト相似ナラシメルコトガ出来ル。

之等ノ補題ヲ用ヒレバ、次ノ定理ガ証明サレル。

定理 1 $\mathcal{U} = \{G_\alpha\}$ ハ R ノ局所有限ノ開被覆トスル。 $\dim R \leq n$ ナラバ、 $(\mathcal{U})\text{-dim } R \leq n$ デアル。(2)

証明 \mathcal{U} ノ cardinal number ガ \aleph_ν ($\nu \geq 0$) ヲリ小ナルトキハ、定理ハ既ニ証明サレタトモトシ。 \mathcal{U} ノ cardinal number ガ \aleph_ν ナルトキモ定理ガ成立フルコトヲ証明スル。コノタメ ω ヲ \aleph_ν ノ Anfangszahlトシ。 ω ヲリ小ナル順序数 α ヲ添数ニツケテ \mathcal{U} ノ集合ヲ表ハスコトニスル。 $\mathcal{U}' = \{G_\alpha; \alpha < \omega\}$ 。以後補題ノタメ $\Omega = \omega$ トオクコトニスル。

切テ補題 1ニヨリ

$$\mathcal{F} = \{F_\alpha; \alpha < \omega\} \quad F_\alpha \subset G_\alpha$$

1) K. Mita, On the dimension theory of normal spaces, Jap. Jour. of Math. 近刊。

(2) C.H. Cowker Lebesgue dimension of a normal space. (Abstract). Bull. of Amer. Math. Soc. 52, p. 243

ナル閉被覆力存在スル。ココテ更ニ

$$F_\alpha \subset L_\alpha, \bar{L}_\alpha \subset G_\alpha, \alpha < \Omega$$

ナル開集合 L_α ヲトツテオク。

被覆 $\{U_\alpha\}$ ヲフィルタ 次ノ如クスル。先ヅ $\alpha < \Omega$ ナル一ツノ順序数 α ニ對シ α ヨリハナル順序数 β ニ對シテハ既ニ

$$(OB) \left\{ \begin{array}{l} \bar{U}_{\beta\gamma} = L_\beta L_\gamma; \gamma \equiv \beta: U_{\beta\gamma} = \emptyset \text{ } \gamma > \beta \\ F'_\alpha \subset \bar{E} \cup_{\gamma \neq \alpha} U_{\beta\gamma} \\ \{ \bar{U}_{\beta\gamma}; \gamma \leq \beta \}, \text{ 次数} \leq n+1 \end{array} \right.$$

ヲ満足スル如キ開集合 $U_{\beta\gamma}$ ガ作ラレタモノト仮定スル。コノドキ條件 (C α) ヲ満足スルヨウニ開集合 U_α ヲ作り得ルコトヲ証明シヨウ。

$U'_\alpha = \sum_{\beta < \alpha} U_{\beta\gamma}$. ($\gamma < \alpha$) トオケバ、 $\{ \bar{U}_{\beta\gamma}; \beta < \alpha \}$ ハ局所有限デアルカ
ヲ $\bar{U}'_\alpha = \sum_{\beta < \alpha} \bar{U}_{\beta\gamma}$ ガ成立スル。コノデ。

$$(1) \quad \{ \bar{U}'_\alpha; \alpha < \Omega \} \text{ノ次数} \leq n+1$$

ガ成立スルコトヲ証明シヨウ。コノタメ

$$x \in \bar{U}'_{\gamma_i}, i=1, 2, \dots, n+2$$

トスレバ、各 γ_i ニ對シ、 $x \in \bar{U}_{\beta_i \gamma_i}$ ナル $\beta_i < \alpha$ ガアル。

ココデ $\beta_i \leq \beta < \alpha$ ($i=1, 2, \dots, n+2$) ナル順序数 β ヲトレバ、

$$x \in \sum_{\gamma \equiv \beta} \bar{U}_{\beta\gamma} \text{ トナルガ、コノデ更ニ } \gamma_i \leq \beta \text{ (} i=1, 2, \dots, n+2 \text{)}$$

ナル如ク β ヲトツテオケバ、コノコトハ條件 (C β)ニ反スルコトガ分ル。從シテ (1)ガ成立スル

取テ $\bar{U}'_\gamma \subset L_\gamma$ テ $\{ L_\gamma; \gamma < \alpha \}$ ハ局所有限デアルカラ 補題 3ニヨリ

$$(2) \quad \bar{U}'_\gamma = V_\gamma \subset L_\gamma, \gamma < \alpha$$

$$(3) \quad \{ V_\gamma; \gamma < \alpha \} \text{ハ } \{ \bar{U}'_\gamma; \gamma < \alpha \} \text{ト相似}$$

ナル如キ開集合 V_γ ガ存在スル。補題 2ニヨレバ、binary covering

$\{ V_\gamma, R - \bar{U}'_\gamma \}, (\gamma < \alpha)$ ノ intersection \mathcal{H} ヲ作レバ、 \mathcal{H} ハ局所有限ノ開被覆デ。

$$(4) \quad S(\bar{U}'_\alpha, \mathcal{H}) \subset V_\alpha, \alpha < \Omega$$

トナル。而モ \mathcal{H} ニ属スル集合ノ個數ハ、順序数 α ノ属スル濃度ヲ超エナイカラヤ

ハリ \mathcal{V} ヨリ小デアル。ソコデ $\mathcal{V} = \text{属スル集合 } L_\alpha \text{ トノ共通集合ヲ作レバ、之ハ } F_\alpha \text{ ノ陪族ヲ而シ居ル有限デ。ソノ適度ハ } \mathcal{V} \text{ ヨリ小デアリ。 } \dim F_\alpha \leq \dim R \leq n \text{ デアルカラ 帰納法ノ仮定ニヨリ、}$

$$(5) \begin{cases} F_\alpha \subset \sum_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda & \bar{H}_\lambda \subset L_\alpha \\ \{ \bar{H}_\lambda ; \lambda \in \Lambda \} \text{ハ } \mathcal{V} \text{ ノ refinement デシノ次数} \leq n+1 \text{ ナル無窮集合} \end{cases}$$

合 $H_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ ガ存在スル。ココテ $\{ \bar{H}_\lambda ; \lambda \in \Lambda \}$ ハ局所有限デアルトシテヨイ。何トナレバ $\mathcal{V} = \{ U_\lambda ; \lambda \in \Lambda \}$ トスレバ、 $\bar{H}_\lambda \subset U_\lambda \cdot L_\alpha$ ナル如クトスレバ定メウルカラデアル。

\bar{U}_i ト交ル \bar{H}_λ ニ對シ、カナル H_λ ノ和ヲ作り之ヲ H'_i トシ、次ニ \bar{U}_i ト交ラズ、 \bar{U}_j ト交ル \bar{H}_λ ニ對シ、カナル H_λ ノ和ヲ作り之ヲ H'_j トシ、以下同様ニシテ H'_β ($\beta < \alpha$) ヲ作ル。

之等ノ集合 $H'_\beta = \lambda$ ナカノ H_λ ノ和集合ヲ $U_{\beta\alpha}$ トシ、

$$(6) \quad U_{\beta\gamma} = \cdot H'_\beta, \quad \beta < \alpha$$

トオケバ、カナル $U_{\beta\gamma}$ ハ條件 (C_α) ヲ満足スル。之ヲイフニハ、

$\{ \sum_{\beta \leq \alpha} U_{\beta\gamma} ; \gamma \leq \alpha \}$ ノ次数 $\leq n+1$ ヲ示セバヨイ。コノ \mathcal{V} ニハ

$$(7) \quad \{ \bar{U}'_\beta + \bar{H}'_\beta, \beta < \alpha ; \bar{U}_{\beta\alpha} \}$$
 ノ次数 $\leq n+1$

ヲ証明スレバヨイ。抑テ

$$X = \prod_{i=1}^r (\bar{U}'_{\beta_i} + \bar{H}'_{\beta_i}) \cdot \bar{U}_{\beta\alpha} \neq 0$$

トスレバ、 $\bar{U}'_{\beta_i} \cdot \bar{U}_{\beta\alpha} = 0$ ヲヨリ $X = \prod_{i=1}^r \bar{H}'_{\beta_i} \cdot \bar{U}_{\beta\alpha} \neq 0$ 。ヨツテ (5) ヲヨリ $r+1 \leq n+1$ 。又

$$X = \prod_{i=1}^r (\bar{U}'_{\beta_i} + \bar{H}'_{\beta_i}) \neq 0$$

ナラバ、

$$\bar{U}'_{\beta_i} + \bar{H}'_{\beta_i} \subset S(\bar{U}'_{\beta_i}, \bar{H}'_{\beta_i}) \subset V_{\beta_i}$$

ナルコトト (3), (4) トヨリ、 $r \leq n+1$ ヲ得ル。從ツテ何レニシテモ (7) ノ成立スル。

以上ニヨリ $\Omega > \beta$ ナルスベテノ順序数 $\beta = \beta$ ノ條件 (C_β) ヲ満足スル陪集合 $U_{\beta\delta}$ ノ存在ガ証明サレタ。ソコデ、

$$U_{\alpha'} = \sum_{\sigma < \Omega} U_{\sigma} \alpha' \quad \alpha' < \Omega$$

トオカバ.

$$U_{\alpha} \subset L_{\alpha} \subset G_{\alpha}, \quad \alpha < \Omega$$

デアリ. 且ツ.

$$R = \sum_{\alpha < \Omega} F_{\alpha} \subset \sum_{\alpha < \Omega} \left(\sum_{\gamma \leq \alpha} U_{\gamma} \right) = \sum_{\alpha < \Omega} U_{\alpha}$$

トナルカラ $U = \{U_{\alpha}; \alpha < \Omega\}$ ハ R ノ開被覆デアルガ. 更ニ Ω ノ次数ハ高々 $n+1$ デアル. 何トナレバ.

$$\alpha \in U_{\alpha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n+2$$

トスレバ.

$$\alpha \in U_{\sigma_i \alpha_i}; \quad i = 1, 2, \dots, n+2$$

ナル σ_i ガアル. ソコテ $i = 1, 2, \dots, n+2$ ニ對シ $\sigma_i \leq \beta, \alpha_i \leq \beta, \beta \leq \Omega$ ナル順序数 β ヲトレバ.

$$\alpha \in \sum_{\sigma \leq \beta} U_{\sigma} \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, n+2$$

トナル. 之ハ條件 (C5) = 反スル. ヨツテ Ω ノ次数ハ高々 $n+1$ デアル. ヨツテ定理1ハ証明サレタ.

上述ノ証明カテ次ノ定理ノ成立ガ知ラレル.

定理2 $\mathcal{G} = \{G_{\alpha}; \alpha \in \Omega\}$ ハ R ノ regular open covering トスル. (即チ $F_{\alpha} \subset G_{\alpha}$ ナル開被覆 $\{F_{\alpha}\}$ ガアルトスル) 而シテ \mathcal{G} ノ濃度ヲ小ナル濃度ヲモツ. \mathcal{G} ノ subsystem ハ局所有限デアルトスル. 然ラバ $\dim R \leq n$ ナラバ. (\mathcal{G}) - $\dim R \leq n$ デアル.

コノ定理ノ系トシテハ直チニ次ノコトガ得ラレル.

例 \mathcal{G} ガ countable regular open covering ン $\dim R \leq n$ ナラバ (\mathcal{G}) - $\dim R \leq n$ デアル.

又定理1ノ証明ト同様ニシテ次ノ定理ガ証明サレル.

定理3 $\mathcal{F} = \{F_{\alpha}; \alpha \in \Omega\}$ ハ R ノ開被覆デ. $\mathcal{G} = \{G_{\alpha}; \alpha \in \Omega\}$ ハ, $F_{\alpha} \subset G_{\alpha}$ ヲミタス開被覆デ且ツ \mathcal{G} ノ濃度ヨリ小ナル濃度ヲモツ. \mathcal{F} ノ subsystem ハ局所有限トスル. 若シシバテノ α ニ對シ $\dim F_{\alpha} \leq n$ ガ成立スルナラバ. $\dim R \leq n$ ガ成立スル.

定理3カラ通常ノ加法定理ガ得ラレルコトハ明ラカデアロウ。

Hurewicz ガ可分距離空間ノ場合ニ証明シタ加法定理モ亦次ノ如ク推定サレル。

定理4 $\mathcal{G} = \{G_\alpha; \alpha \in \Omega\}$ ハ \mathbb{R} ノ局所有限ノ開被覆 $\{A_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ ハ

局所有限ノ閉集合系トスル。若シ

$(\mathcal{G})\text{-dim } A_\lambda \leq n$; $\lambda \neq \mu$ ナラバ $\dim A_\lambda \cdot A_\mu \leq n-1$ ナラバ

$(\mathcal{G})\text{-dim } \sum_{\lambda} A_\lambda \leq n$ ガ成立スル。

証明 先ツ

$(\mathcal{G})\text{-dim } A \leq n$; $(\mathcal{G})\text{-dim } B \leq n$, $\dim A \cdot B \leq n-1$

ナラバ, $(\mathcal{G})\text{-dim } [A+B] \leq n$ ナルコトヲ証明スル。

仮定ニヨリ

(2) $A = \sum A_\alpha$, $B = \sum B_\alpha$

(9) $A_\alpha = U_\alpha \subset G_\alpha$, $B_\alpha \subset V_\alpha \subset G_\alpha$, $\alpha \in \Omega$

(10) $\{U_\alpha; \alpha \in \Omega\}$ ノ次数 $\leq n+1$, $\{V_\alpha; \alpha \in \Omega\}$ ノ次数 $\leq n+1$

ナル閉集合 A_α , B_α , 開集合 U_α , V_α ガ存在スル。 $\dim A \cdot B \leq n-1$ ナル故

定理1ニヨリ

(11) $AB = \sum_{\lambda < \lambda_0} W_\lambda$

(12) $\{\overline{W}_\lambda; \lambda < \lambda_0\}$ ハ \mathcal{G} ノ $\{U_\alpha, R-A_\alpha\}$,

$\{V_\alpha, R-B_\alpha\}$ $\alpha \in \Omega$ ノ何レニ対シテモ ϵ ノ refinement デアル。

(13) $\{\overline{W}_\lambda; \lambda < \lambda_0\}$ ノ次数 $\leq n$

ナル局所有限ノ閉集合系 $\{W_\lambda; \lambda < \lambda_0\}$ ガアル。ココデ λ_0 ハアル順序数トスル。次ニ、

(14) $C = \sum_{\alpha \in \Omega} C_\alpha$, $C_\alpha = B_\alpha (R - \sum_{\lambda < \lambda_0} W_\lambda)$

トオケバ, C_α ハ閉集合デ且ツ $\{C_\alpha; \alpha \in \Omega\}$ ハ局所有限デアル。取テ $A \cdot C = 0$ ナル故。

(15) $\overline{W}_1 = E_1 + F_1$, $E_1 \cdot C = F_1 \cdot A = 0$

ナル閉集合 E_1, F_1 ガ存在スル。 A, C, E_1, F_1 ガ互ニ disjoint デアルカラ同様ニ

(16) $\overline{W}_2 = E_2 + F_2$, $E_2 \cdot (C + E_1 \cdot F_1) = F_2 \cdot A = 0$

ナル間集合 E_λ, F_λ が存在スル。以下同様ニシテ $\lambda < \lambda_0$ ナルスベテノ λ ニ於テ

$$(17) \quad \overline{W}_\lambda = E_\lambda + F_\lambda \quad E_\lambda (C + \sum_{\mu < \lambda} E_\mu \cdot F_\mu) = F_\lambda \cdot A = 0$$

ナル間集合 E_λ, F_λ ガアル。之等ノ E_λ, F_λ ニ於テハ

$$(18) \quad A \cdot C = 0, \quad E_\lambda \cdot C = 0, \quad F_\lambda \cdot A = 0$$

$$(19) \quad \lambda \neq \mu \text{ ナラバ, } (E_\lambda \cdot F_\lambda) \cdot (E_\mu \cdot F_\mu) = 0$$

ガ成立スル, トコロデ (13) ト (19) カラ

(20) $\{E_\lambda, \lambda < \lambda_0, F_\lambda, \lambda < \lambda_0\}$ ノ次数 $\leq n+1$ ノ成立スルコトガ証明サレヌ。

$A \cdot E_\lambda = 0$ ナル E_λ ヲ $E_\mu, \mu < \mu_0$ トシ, $C \cdot F_\lambda = 0$ ナル F_λ ヲ $F_\nu, \nu < \nu_0$ ト命名スル。 $A_\alpha \cdot E_\lambda \neq 0$ ナル E_λ ノ和集合ヲ E'_α トスル。但シ $A_\alpha \cdot E_\lambda \neq 0$ $A_\beta \cdot E_\lambda \neq 0$ ナル E_λ ハ何レカ唯一ツノ E'_α ノ中ニ繰入レテオクモノトスル。同様ニ $C_\alpha \cdot F_\lambda \neq 0$ ナルイコツカソ F_λ ノ和集合ヲ F'_α トシ, $C \cdot F_\lambda \neq 0$ ナル F_λ ハ之等ノ何レカ唯一ツノ F'_α ニ含マレルモノトスル。然ルトキハ定理 1 ノ証明ニ於ケル如ク。

$$(21) \quad A_\alpha + E'_\alpha \subset U_\alpha, \quad C_\alpha + F'_\alpha \subset V_\alpha$$

ガ成立スル, 故テ

$$L = \prod_{i=1}^r (A_{\alpha_i} + E'_{\alpha_i}) \prod_{i=1}^s (C_{\beta_i} + F'_{\beta_i}) \prod_{i=1}^u E_{\mu_i} \prod_{i=1}^v F_{\nu_i} \neq 0$$

トスレバ $r + s + u + v \leq n + 1$ ナル。

何トナレバ

1) $u \geq 1$ ナラバ (18) ヲリ $L = \prod E'_{\alpha_i} \prod F'_{\beta_i} \prod E_{\mu_i} \prod F_{\nu_i}$

故ツテ (20) ヲリ $r + s + u + v \leq n + 1$

2) $v \geq 1$ ナルトキハ 1) ト同様

3) $u = v = 0$ ナルトキハ

1) $r \geq 1, s \geq 1$ ナラバ (18) ニヨリ $L = \prod E'_{\alpha_i} \prod F'_{\beta_i}$

ヨツテ (20) ヲリ $r + s \leq n + 1$

2) $r = 0$ ナラバ (20), (21) ヲリ $s \leq n + 1$

3) $s = 0$ ナルトキハ 2) ト同様

ナアルカラ

ソコデ

$$B'_\alpha = (C_\alpha + E'_\alpha + F'_\alpha + \sum_{E''_\mu \subset G_\alpha} E''_\mu + \sum_{F''_\mu \subset G_\alpha} F''_\mu) \cdot B$$

トオカバ $B'_\alpha \subset G_\alpha$ デ B_α ハ閉集合. 且ツ

$\mathcal{F} = \{A_\alpha + B'_\alpha; \alpha \in \Omega\}$ ハ $A+B$ ノ閉族ヲデ. ソノ次数ハ上ノコトヨリ
高々 $n+1$ ナルコトガ分ル. 従ツテ (n) - $\dim [A+B]$ ナルガ成立スル. コノ
証明カテ一般ニ定理ノ成立ガ知ラレル.

Zorn ノ問題ヲ用ヒバ コノ定理カラ. n 次元ノ *licompact* ナ R ガ n
次元ノ *Cantor manifold* ヲ含マヌコトガ証明サレルコトヲ注意ンテ置カウ.