103　不動点定理に就て II

佐藤徳意（6.3）

南雲氏から私の前談話会原稿を読まれたとて次の厚意ある注意の手紙(IX.13.1947)を頂いた。

前略. En la pruvo de S-ro Nomizu troviĝas grava eraro, kiu ne antaŭe Iute ne rimarkis! Kaj ankaŭ la pruvo de la Teoremo 1 de Schauder en Stud. Math. II ŝajnas al mi ne korekta! Ankaŭ en via pruvo de Teoremo A troviĝas linioj kiun mi tedaŭ rinde ne komprenis (en p. 27). T.e la esprimo $V_\ell(\hat{x}_\ell)\,V_i(\hat{x}_i) \ni f(y_{jk})$ (en la 2a-linio) kaj la frazo $f(y_{jk})$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ apartenas do al unu najbaraĵo $V(x_0)$ kiun enhavas $V_\ell(\hat{x}_\ell)$ (en la 3a k. 4a linioj)". Kaj mi dubas eĉ la teoremon de la granda matematikisto Schauder kvankam mi ne povas doni kontraŭekzemplon. 後略.

私も野水氏の証明及びSchauderの証明を完全なものと見ておなかつたので別に驚きはしなかつたがSchauderの定理すらその成立に疑問を持たれるとのことで非常な衝撃を受けた。それは私の楕円型偏微分方程式 $\Delta z = f(x, y, z, p, q)$ に関するDirichletの問題の研究に於ける一大支柱を失ふことになるから。私の不動点定理の証明も南雲氏の御注意の通り. $V_\ell(\hat{x}_\ell)\,V_i(\hat{x}_i) \ni f(y_{jk})$ は誤りで従てその後の行は無意味なことになるのである。併し私が望んでゐる函数空間に於て有用な定理の証明に充分な程度の不動点定理は成立つので、それを以下で述べ度いと思ふ。前談話会と少く説明が重複するが誤りの出た理由を明かに

し. どのやうに仮定を変更したかを説明し度い為始めから述べよう。

定義1　次の條件を満足する *linia* T_1- *spaco* を *linia topologia spaco* と云ふ

i) $x+y$ は連続である.

ii) λx は λ 及び x に関して連続である"

注意　1) *Linia topologia spaco* は *linia* T_3- *spaco* (*regula Hausdorff-a*) である.

2) *Linia topologia spaco* に於ては、予め与へられた整数 n 及び近傍 $W(x)$ に対し次のやうな近傍 $U(x)$ が存在する.

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i \in W(x) \qquad (\lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1).$$

$$x_i \in U(x) \qquad (i=1,2,\ldots\ldots n)$$

3) R を次の條件を満足する *linia* T_1- *spaco* とする.

i) R は加法 $+$ に関して連続群をなす.

ii) 予め与へられた近傍 $W(\theta)$ に対し次のやうな近傍 $U(\theta)$ が存在する。

$$\lambda x+\mu y \in W(\theta),\ \lambda,\ \mu \geq 0,\quad \lambda+\mu=1.$$

$$x,\ y \in U(\theta).$$

然るときは R は *linia topologia spaco* である.

定義2　*Linia topologia spaco* が集合 K に於て次の條件を満足するとき. K に於て *lokale preskaŭ konveksa* であると云ふ

予め与へられた近傍 $W(x)$ $(x\in K)$ に對して

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i \in W(x) \qquad (\lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1)$$

$$x_i \in U(x)K \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

を満足させる近傍 $U(x)$ が存在する. 茲に n は任意の整数とする (固定せず).

注意 1). *Linia metrica spaco* が集合 K で

$$\|\lambda x\| \leq \lambda^{k}\|x\| \qquad 0\leq \lambda \leq 1,\quad x\in K \qquad (k\text{は常数})$$

を満足するならば K に於て *lokale preskaŭ konveksa* である.

2) K が空間と一致すれば Tychonoff の *lokale konveksa space* と成る.

A. *Tychonoff* の方法に依り彼の不動点定理は次のやうに拡張される。

定理．Kは *linia topologia spaco* に於ける凸集合とし，$y=f(x)$ はKで定義された連続写像とする．もし次の條件を満足する *bikompakta* な集合 B が存在するならば少くとも一つの不動点

$$x=f(x) \qquad x \in f(K)$$

が存在する。　Bは

$$f(K) \subseteq B \subseteq K$$

であり．空間はBで *lokale preskaŭ konveksa* である。

この定理の形は *Funk. Ekv. I, N-ro 1* で述べた定理と全く同一であるが．見掛上些な変更．即ち定義2に於ける（固定せず）が本質的なのである。もし固定しても証明することが出来るならば　定義（注意3）により．前報告で述べたやうな結果になる。南雲氏が指摘して下さつた私の誤り

$$V_\ell(x_\ell)\ V_i(x_i) \ni f(y_{jk})$$

式を固定しようと無理をした為に（実は不可能なことであらう）生じたのである。以上で *Tychonoff* の定理は少しく拡張することが出来たが．*Schauder* 予想の成否に関する本質に何等触れてゐない。