101. 連續幾何學の公理について

佐々木右左　(6. 4)

J. v. Neumann の連続幾何学は次の命題(α)及び(α*)（(α)の双対的命題を示す。以下同様）をみたす完備可補束である。

(α)　Ω が任意の超限順序数なるとき、$\alpha<\beta<\Omega$ に対して

$a_\alpha \leqq a_\beta$ ならば

$$\left(\bigvee_{\alpha<\Omega} a_\alpha\right) \frown b = \bigvee_{\alpha<\Omega}(a_\alpha \frown b).$$

前田先生は談話1047（第236号）で、完備束に於て(α)は下に述べる(γ)と同等である事を示されたが之について尚少し考察したい。

L を完備束とする。有向集合Dの元δを添字とするLの部分集合 $(a_\delta,\ \delta\in D)$ があつて $\delta_1<\delta_2$ なるとき $a_{\delta_1}\leqq a_{\delta_2}$ ならば $a=\bigvee_{\delta\in D} a_\delta$ として $a_\delta\uparrow a$ とかき、双対的に $a_\delta\downarrow a$ を定義する。

又 $v_\delta\leqq a_\delta\leqq u_\delta$, $v_\delta\uparrow a$, $u_\delta\downarrow a$ なる u_δ, v_δ, a が有る時

$(o)-\lim a_\delta = a$ と書く。

〔定理〕　完備束Lに於て、次の三命題は同義である。

(α)　上述の命題

(β)　$a_\delta\uparrow a$ ならば $a_\delta\frown b\uparrow a\frown b$.

(γ)　$S\leqq L$ なるとき、Sの任意の有限部分集合 ε に対して

$$\left(\bigvee_{a\in\varepsilon} a\right)\frown b = \bigvee_{a\in\varepsilon}(a\frown b) \text{ ならば}$$

$$\left(\bigvee_{a\in S} a\right)\frown b = \bigvee_{a\in S}(a\frown b)$$

(証)　(α)→(β)→(γ)→(α) の順序に証明する。

(α)→(β) 帰納法による。

(β)の成立しないやうな有向集合があるとすれば、其の中に最小の濃度を有するものDがある。

有限有向集合に対しては明らかに(β)は成立つから D は無限集合である。故にその部分有向集合の超限列 $\{D_\alpha\}$ でつくられて、次の性質を有するものが存在

する。（岩村氏、談話 1173（第262号）参照）

(i) 各の D_α の濃度 $\overline{\overline{D_\alpha}} < \overline{\overline{D}}$

(ii) $\alpha < \beta < \Omega$ のとき、$D_\alpha \subseteq D_\beta$

(iii) $D = \sum_{\alpha<\Omega} D_\alpha$

各の $\alpha < \Omega$ に対して (i) より

(1) $\left(\bigvee_{\delta\in D_\alpha} a_\delta\right) \wedge b = \bigvee_{\delta\in D_\alpha} (a_\delta \wedge b) \qquad (\alpha < \Omega)$

然るに (ii) から $\alpha < \beta < \Omega$ に対して

$$\bigvee_{\delta\in D_\alpha} a_\delta \leqq \bigvee_{\delta\in D_\beta} a_\delta$$

なる故 (α) を用いて

$$\bigvee_{\alpha<\Omega} \left(\bigvee_{\delta\in D_\alpha} a_\delta\right) \wedge b = \bigvee_{\alpha<\Omega} \left\{\left(\bigvee_{\delta\in D_\alpha} a_\delta\right) \wedge b\right\}$$

従って (1) 及び (iii) により

$$\left(\bigvee_{\delta\in D} a_\delta\right) \wedge b = \bigvee_{\delta\in D} (a_\delta \wedge b)$$

を得る。即ちDに対しても $a_\delta \wedge b \uparrow a \wedge b$ が成立つて不合理。

(β)→(γ) Sの有限部分集合 δ の全体Dは包含関係を順序として有向集合を作り

$$a = \bigvee_{a\in S} a \quad a_\delta = \bigvee_{a\in\delta} a$$ とすれば $a_\delta \uparrow a$ である。

故に (β) により $a_\delta \wedge b \uparrow a \wedge b$.

然るに仮定により $a_\delta \wedge b = \bigvee_{a\in\delta} (a \wedge b)$ であるから (γ) が成立つ

(γ)→(α) $S = \{a_\alpha ; \alpha < \Omega\}$ なる集合を考へれば容易に証明出来る（前田先生前出談話参照）

（証明終り）

［注意1］此の定理から連続幾何学を定義する為に、上の三命題の何れを取つて、その双対命題と共に、連続性の公理として採用してもよい事が分かる。

［注意2］(β)′ が成立つとき、

$v_\delta \uparrow a$, $v'_\delta \uparrow b$ ならば $v_\delta \wedge v'_\delta \uparrow a \wedge b$ は容易に証明出来（G. Birkhoff Lattice theory p.30参照）又 $u_\delta \downarrow a$, $u'_\delta \downarrow b$ ならば当然 $u_\delta \wedge u'_\delta \downarrow a \wedge b$ であるから

(δ) $(o)\text{-}\lim a_\delta = a$, $(o)\text{-}\lim b_\delta = b$ ならば $(o)\text{-}\lim (a_\delta \wedge b_\delta) = a \wedge b$.

が成立し、逆に (δ)→(β) も云へるから (β) と (δ) とは同等である。

(S) 及び(S*)を満足する束を G. Birkhoff は位相束と呼んでゐる。(同上 p.30. 脚註) 従つて連続幾何学とは完備・可補・位相・模束であると云ひ得る。

最後に親切なる御指導並びに御鞭撻を賜つた前田先生及び小笠原兄に深甚な感謝の意を表したい。