100. Boole束の一定理

小笠原藤次郎・佐々木右左 (5.28)

可補足に於ける Birkhoff-Ward の予想は一般な形では解決されてゐないが原子的のとき完備性を仮定すれば肯定されてゐる. 茲ではこの仮定なしに云へる事を示さう.

〔定理〕 原子的な束 L の各元が唯一つの補元をもつとき, L は Boole 束である. 次の補題の順に証明を進行する.

補題 1. $a<b$ ならば $a'\frown b\neq 0$

(証) $a'\frown b'=0$ ならば, $a\smile b\geq a'\smile a=1$. 補元の一意性から $a=b$ となり矛盾.

補題2.　$a \leqq b$ でないなら．$a \frown x = x$，$b \frown x = 0$ なる原子元 x がある．

（証）$a \frown b < a$ から $(a \frown b)' \frown a \neq 0$（補題1）．従つて $x \leqq (a \frown b)' \frown a$ なる原子元 x をとると．$a \frown x = x$，$b \frown x = x \frown (a \frown b)' \frown a \frown b = 0$

補題3　原子元 x に対し．$x' < a$ ならば $a = 1$

（証）$x \frown a = (x')' \frown a \neq 0$（補題1.）故に $x \leqq a$．従つて $a \geqq x \smile x' = 1$

補題4.　原子元 x に対し　$x \frown a = 0$ ならば，$x' \geqq a$．

（証）$x' \geqq a$ でないとすると．$y \leqq a$　$y \frown x' = 0$ なる原子元 y がある（補題2）　従つて $y \smile x' = 1$（補題3）となり．補元の一意性から $x = y$　故に $0 = a \frown x = a \frown y = y$ となり矛盾．

補題5.　原子元 x に対して．$x \leqq a$ か $x \leqq a'$ の何れかに限る。

（証）　結論を否定すると．$x' \geqq a$．$x' \geqq a'$（補題4）．従つて $x \geqq a \smile a' = 1$ となり矛盾．

補題6. 原子元 x に対し $x \leqq a \smile b$ ならば．$x \leqq a$ か $x \leqq b$ かである．

（証）　結論を否定すると　$x' \geqq a$，$x' \geqq b$（補題4）．従て $x' \geqq a \smile b \geqq x$．故に $x = x' \frown x = 0$ となり矛盾．

今 $x \leqq a$ なる原子元 x の全体からなる集合を A_a で表すと

補題7

(1)　$a = b$ と $A_a = A_b$ は同値

(2)　$A_{a'} = A_a^c$　（補集合）

(3)　$A_{a \smile b} = A_a + A_b$

（証）補題2．5．6．から

かくて L は Boole 集合束に同型となつてそれ自身 Boole 束である．

これで証明がすんだが．補題5.6の代りに次の補題の成立を云つてもよい。

（小笠原　束論 p5 定理1）

補題　　$a \frown b = 0$ ならば $a \leqq b'$

（証）$a \leqq b'$ でないとすると　$x \leqq a$，$b' \frown x = 0$ なる原子元 x がある．（補題2）
$b' \frown x = 0$ 及び $b \frown x = b \frown a \frown x = 0$ から $b \leqq x'$，$b' \leqq x'$（補題4）．従つて $x' \geqq b \smile b' = 1$ となり矛盾