99. Riemann空間の上で定義された或る種のベクトル空間に就て(II)

朝長康郎 (6.13)

§7. Holonomy群が二つの独立な超球V^λ, W^λを固定する場合

此の時は

$$(7.1)\begin{cases} \text{(A)}\quad \dfrac{\partial V^i}{\partial x^k}+\Gamma^i_{jk}V^j+\Gamma^i_{0k}V^0+\delta^i_k=0, \quad \dfrac{\partial V^0}{\partial x^k}+\Gamma^0_{jk}V^j=0 \\ \text{(B)}\quad \dfrac{\partial W^i}{\partial x^k}+\Gamma^i_{jk}W^j+\Gamma^i_{0k}W^0+\delta^i_k=0, \quad \dfrac{\partial W^0}{\partial x^k}+\Gamma^0_{jk}W^j=0 \end{cases}$$

であるから　今Aを常数として

$$(7.2)\qquad X^\lambda=AV^\lambda+(1-A)W^\lambda$$

なる超球を造れば之又Holonomy群に固定される。即ち、

$$(7.3)\qquad \frac{\partial X^i}{\partial x^k}+\Gamma^i_{jk}X^j+\Gamma^i_{0k}X^0+\delta^i_k=0, \quad \frac{\partial X^0}{\partial x^k}+\Gamma^0_{jk}X^j=0.$$

由て§5の議論がX^λにも適用されて，X_iが勾配ベクトルとなり

$$(7.4)\qquad X^i=AV^i+(1-A)W^i=g^{ia}\frac{\partial}{\partial x^a}\{A\varphi+(1-A)\psi\}$$

但し

$$(7.5)\qquad V^i=g^{ia}\frac{\partial\varphi}{\partial x^a}; \qquad W^i=g^{ia}\frac{\partial\psi}{\partial x^a}$$

とする。　又(5.14)と同様に

$$(7.6)\qquad g_{\lambda\mu}X^\lambda X^\mu=-2\{A\varphi+(1-A)\psi\}+\mathrm{const}$$

である。即ち 点x^iから超球X^λに到る共通の接距離は、

$A\varphi+(1-A)\psi=\mathrm{const}$. で定る超曲面上では一定である。(7.1)でAを変へれば∞^1の超球群が出来る。それ等は何れもHolonomyの群に固定される。今其の中で若干のR_nと交はるものが存在する場合即ち

(7.7) $$g_{\lambda\mu}X^{\lambda}X^{\mu}=0$$

が或るx^iの領域で満足される様な $X^{\lambda}=AV^{\lambda}+(1-A)W^{\lambda}$ が存在する場合を考へよう。(7.7)が成立つことは

(7.8) $$g_{\lambda\mu}(AV^{\lambda}+(1-A)W^{\lambda})(AV^{\mu}+(1-A)W^{\mu})=0$$

即ち A に関する次の二次方程式が実根を有つ場合である。

(7.9) $$A^2\{g_{\lambda\mu}V^{\lambda}V^{\mu}+g_{\lambda\mu}W^{\lambda}W^{\mu}-2g_{\lambda\mu}V^{\lambda}W^{\mu}\}$$
$$+2A(g_{\lambda\mu}V^{\lambda}W^{\mu}-g_{\lambda\mu}W^{\lambda}W^{\mu})+g_{\lambda\mu}W^{\lambda}W^{\mu}=0$$

判別式を考へれば

(7.10) $$(g_{\lambda\mu}V^{\lambda}W^{\mu}-g_{\lambda\mu}W^{\lambda}W^{\mu})^2-(g_{\lambda\mu}W^{\lambda}W^{\mu})(g_{\lambda\mu}V^{\lambda}V^{\mu}-2g_{\lambda\mu}V^{\lambda}W^{\mu}+g_{\lambda\mu}W^{\lambda}W^{\mu})\geqq 0$$

が或るx^iの領域で成立つ場合である。Aを決めれば(7.8)は一つの超曲面を定める。この超曲面上では(7.6)から $A\varphi+(1-A)\psi=const.$ であるから其の法線がX^iと比例する。而し(7.7)から超曲面上の点からX^{λ}迄の共変切線距離は0であるから X^{λ}はこの超曲面に接触する超球である。又X^{λ}は、この超曲面に沿つて移動されても動かないから §4で導れたもので今後、W－超曲面と呼ぶことにする。其の方程式は(4.12)から

(7.11) $$\begin{cases}\rho(-H\delta_A+\varepsilon\Gamma^i_{0k}\xi^B_i\xi^k_A)+\delta^B_A=0\\ \varepsilon\dfrac{\partial\rho}{\partial u^A}+\Gamma_{ij}\delta n^i\xi^j_A=0\end{cases}$$

但 $x^i=x^i(u^A)$ を超曲面のパラメーター表示とし
$$\xi^i_A=\frac{\partial x^i}{\partial u^A},\quad \xi^B_i=g_{ij}g^{AB}\xi^j_A,\quad \varepsilon=\pm 1$$
とする。即ち(7.10)が成立つ領域には∞のW－超曲面が存在する。その直截曲線はAをパラメーターに選べば次の形における。

(7.12) $$\frac{dx^i}{dA}\pi(A)=AV^i+(1-A)W^i$$

(7.8)から

(7.13) $$\pi(A)=\frac{AV^0+(1-A)W^0}{\dfrac{ds}{dA}}$$

(但し、Sは曲線の弧長とする。)でなければならない。

$$
(7.14)\quad
\begin{cases}
\dfrac{dV^i}{dA}+\Gamma^i_{jk}V^j\dfrac{dx^k}{dA}+\Gamma^i_{0k}V^0\dfrac{dx^k}{dA}+\dfrac{dx^i}{dA}=0, & \dfrac{dV^0}{dA}+\Gamma^0_{ij}V^i\dfrac{dx^j}{dA}=0\\[2mm]
\dfrac{dW^i}{dA}+\Gamma^i_{jk}W^j\dfrac{dx^k}{dA}+\Gamma^i_{0k}W^0\dfrac{dx^k}{dA}+\dfrac{dx^i}{dA}=0, & \dfrac{dW^0}{dA}+\Gamma^0_{j}W^i\dfrac{dx^j}{dA}=0
\end{cases}
$$

が成立つから(7.12)を更に曲線に沿つて微分すれば、

$$
(7.15)\quad P\frac{\delta^2 x^i}{dA^2}+R\frac{dx^i}{dA}+R\Gamma^i_{0k}\frac{dx^k}{dA}=V^i-W^i
$$

の形になる。但し、

$$
\frac{\delta^2 x^i}{dA^2}=\frac{d^2x^i}{dA^2}+\Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dA}\frac{dx^k}{dA}
$$

特に $\underline{\Gamma^i_{0k}=C\delta^i_k}$ (C=定数)の場合は、W-超曲面は、固有全臍超曲面となるし、(7.14)と(7.15)から

$$
(7.16)\quad \frac{\delta^3 x^i}{dS^3}+L\frac{\delta^2 x^i}{dS^2}+M\frac{dx^i}{dS}=0
$$

が導かれる。(L, Mは或るSの函数)

以上を綜合すれば、

[定理] Holonomy群が2つの独立な超球 V^λ, W^λ を固定する時、若し(ZK)の成立つ領域が在れば其の中には ∞^1 のW-超曲面が存在し、其の直截曲線は(7.15)の形になる。特に $\Gamma^0_{ij}=Cg_{ij}$ (C=定数)のときは ∞^1 の固有全臍超曲面が存在し其の直截曲線は(7.16)の形になる。[1948. 6. 10]