

98. Riemann 空間の上で定義された或種のベクトル空間に就て(II)

朝長 康 郎

§3 (第7号の談話69に続く) 今後は空間に換わがないことを仮定する。即ち線素

$$dx^\lambda = \begin{cases} dx^i & (\lambda=i) \\ 0 & (\lambda=0) \end{cases}$$

を任意の方向 dx^i, dx^j に動かした時 次の関係が成立つとする。

$$(3.1) \quad (d_{\frac{1}{2}} d_{\frac{1}{2}} x^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda dx^\mu dx^\nu) = (d_{\frac{1}{2}} d_{\frac{1}{2}} x^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda dx^\mu dx^\nu) = 0$$

標言すれば'

$$(3.2) \quad \Gamma_{ij}^\lambda = \Gamma_{ji}^\lambda$$

仮令に分けると

$$(3.3) \quad \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i, \quad \Gamma_{R}^0 = \Gamma_{S}^0$$

となる。故に (L8) の如く

$$\Gamma_{jk}^i = \{ \begin{smallmatrix} i \\ jk \end{smallmatrix} \}$$

となるのは勿論である。

Riemann 空間や共形接続空間に於て Holonomy 群の性質から空間の構造を決定する研究が近年佐々木重夫博士 矢野俊太郎博士等に依り大きな発展を見た。

之等によつては

◎ 佐々木重夫 矢野俊太郎 「Holonomy 群が任意次元の球を不変にするやうな標準共形接続空間の構造に就て」 (「数学」第1巻第一号)

◎ 佐々木重夫 「共形接続幾何学」(河出書房)

等を参照されたい

我々の L_n に於ても接続の係数 $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ に依り空間の各点に附随する $n+1$ 次元ベクトル空間(超球空間)を閉曲線に沿つて次々と廻らしてゆけば 全場は Holonomy 群 H のものを考えることが出来る。

§4 Holonomy 群が一つの超球を不変にする L_n の構造

(A) $v^\lambda = \begin{cases} v^i & (\lambda=i) \\ 0 & (\lambda=0) \end{cases}$

—293—

の形の超球(即ち点)が固定される場合を先ず考へる。

$$(4.1) \quad DV^\lambda + dX^\lambda = dV^\lambda + \Gamma_{\mu R}^\lambda V^\mu dX^R + dX^\lambda = 0$$

即ち 成分に分ければ

$$(4.2) \quad \begin{cases} dV^i + \Gamma_{jk}^i V^j dX^k + dX^i = 0 \\ \Gamma_{ij}^0 V^i dX^j = 0 \end{cases}$$

となければならない。

dX^i は任意だから

$$(4.3) \quad \begin{cases} \frac{dV^i}{dX^k} + \Gamma_{jk}^i V^j + \delta_k^i = 0 \\ \Gamma_{jk}^0 V^j = 0 \end{cases}$$

が必要充分である。即ち V^i は R_n のベクトルとしては定点通過ベクトル場を形成する。かゝる R_n の構造は良く知られてゐるから略す。

次に超球

$$(B) \quad V^\lambda = \begin{cases} 0 & (\lambda=i) \\ v^0 & (\lambda=0) \end{cases}$$

即ち各点 (X^i) を中心とする超球が固定される場合を考へよう。此の場合

$$(4.4) \quad DV^\lambda + dX^\lambda = \begin{cases} \Gamma_{0k}^i V^0 dX^k + dX^i = 0 & (\lambda=i) \\ dV^0 = 0 & (\lambda=0) \end{cases}$$

が dX^i の如何に不拘成立たねばならないから。

$$(4.5) \quad V^0 = U_{i,j} T_{ij}$$

$$(4.6) \quad \Gamma_{0k}^i v^0 + \delta_k^i = 0$$

となる。換言すれば

$$(4.7) \quad \Gamma_{jk}^0 = g_{im} \Gamma_{ok}^{im} = C g_{ik} \quad (C \text{ は定数}).$$

此の場合注意すべきことがある。それは

[定理] $\Gamma_{ij}^0 = C g_{ij}$ ($C = \text{定数}$) の時はそれに関する超球が其の超曲面に沿つて L_n の意味で展開された時いつも重なるやうな超曲面は R_n の固有な超曲面である。

[証明] 今 \bar{R}_n の中の或る超曲面

$$x^i = x^i(u^1, \dots, u^{n-1})$$

の各点でこの曲面に接する超球

$$(4.8) \quad v^\lambda = \begin{cases} f n^i & (\lambda = i) \\ f & (\lambda = 0) \end{cases}$$

(但し n^i は超曲面の法線ベクトルとする)

が 此の超曲面に沿つて \mathbb{R}^n の意味で展開された時、常に重なるとする。即ち超曲面に沿つて、

$$(4.9) \quad Dv^\lambda + dx^\lambda = 0$$

が成立つとする。

従つて

$$(4.10) \quad \begin{cases} d(f n^i) + \Gamma_{jk}^i f n^j dx^k + f \Gamma_{0k}^i dx^k + dx^i = 0. \\ df + f \Gamma_{ij}^0 n^i dx^j = 0 \end{cases}$$

$$(4.11) \quad dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^A} du^A \quad (A, B, C \text{ 等は } i \text{ から } n-i \text{ 迄動く})$$

が du^A の如何に不均成立つ。換言すれば

$$(4.12) \quad \begin{cases} (a) \frac{\partial f}{\partial u^A} n^i + f \left(\frac{\partial n^i}{\partial u^A} + \Gamma_{jk}^i n^j \frac{\partial x^k}{\partial u^A} + \Gamma_{0k}^i \frac{\partial x^k}{\partial u^A} \right) + \frac{\partial x^i}{\partial u^A} = 0 \\ (b) \frac{\partial f}{\partial u^A} + \Gamma_{ij}^0 f n^i \frac{\partial x^j}{\partial u^A} = 0 \end{cases}$$

而して Riemann 幾何の超曲面論から

$$(4.13) \quad \frac{\partial n^i}{\partial u^A} + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} n^j \frac{\partial x^k}{\partial u^A} = - \frac{\partial x^i}{\partial u^B} H^B_A$$

であるし、又

$$\Gamma_{0k}^i = C \delta_k^i$$

であるから (4.12 a) から 次の2つの関係を得る。

$$(4.14) \quad \frac{\partial f}{\partial u^A} = 0 \quad f = \text{const}$$

$$(4.15) \quad f (-H^B_A + C \delta^B_A) + \delta^B_A = 0$$

即ち

$$H^B_A = \frac{fC + 1}{f} \delta^B_A$$

右辺の係数は超曲面に沿つては常数だから、此の超曲面は R_n の固有全等変曲面であることが分る

此の程 (4.12. b) は (4.14) から当然成立つ。 (3)

§5 知

$$(c) V^\lambda = \begin{cases} V^i & (\lambda=i) \\ V^0 & (\lambda=0) \end{cases}$$

即ち一般の位置にある超球が固定される場合は

$$(5.1) \quad DV^\lambda + dX^\lambda = dV^\lambda + \Gamma_{\mu k}^\lambda V^\mu dX^k + dX^\lambda = 0$$

であつて 成分に分ければ

$$(5.2) \quad \begin{cases} dV^i + \Gamma_{jk}^i V^j dX^k + \Gamma_{jk}^i V^0 dX^k + dX^i = 0 \\ dV^0 + \Gamma_{ij}^0 V^i dX^j = 0 \end{cases}$$

dX^i は任意だから

$$(5.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial V^i}{\partial X^k} + \Gamma_{jk}^i V^j + \Gamma_{0k}^i V^0 + \delta_k^i = 0 & (a) \\ \frac{\partial V^0}{\partial X^k} + \Gamma_{jk}^0 V^j = 0 & (b) \end{cases}$$

どなければならぬ。今

$$(5.4) \quad V_i = g_{ij} V^j$$

と置けば (5.3.0) から 次式を得る。

$$(5.5) \quad \left(\frac{\partial V_i}{\partial X^k} - \Gamma_{ik}^j V_j \right) + \Gamma_{ik}^0 V^0 + g_{ik} = 0$$

i と k を入れ替へて (5.5) から引けば。

$$(5.6) \quad \frac{\partial V_i}{\partial X^k} - \frac{\partial V_k}{\partial X^i} = 0.$$

即ち V_i は或るスカラー φ の勾配である。

$$(5.7) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial X^i} = V_i.$$

こゝ (5.5) から次式を得る。

$$(5.8) \quad V^i \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^i \partial X^k} - \Gamma_{ij}^m \frac{\partial \varphi}{\partial X^m} \right) + \Gamma_{jk}^0 V^0 V^i + \frac{\partial \varphi}{\partial X^k} = 0$$

又 (5.3 b) より

$$(5.9) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial (V^0)^2}{\partial X^k} + \Gamma_{jk}^0 V^0 V^j = 0$$

(5.8) と (5.9) から

$$(5.10) \quad g^{ab} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial X^a} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^i \partial X^k} - \Gamma_{ik}^j \frac{\partial \varphi}{\partial X^j} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial X^k} - \frac{1}{2} \frac{\partial (V^0)^2}{\partial X^k} = 0$$

即ち。

$$(5.11) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^k} (g^{ab} \frac{\partial \psi}{\partial x^a} \frac{\partial \psi}{\partial x^b}) + \frac{\partial}{\partial x^k} (\psi - \frac{1}{2} (V^0)^2) = 0$$

由て

$$(5.12) \quad V^0 = \sqrt{2\psi + g^{ab} \frac{\partial \psi}{\partial x^a} \frac{\partial \psi}{\partial x^b}}$$

となる。又 (5.5) から $V^0 \neq 0$ の点では

$$(5.13) \quad \Gamma_{ij}^0 = \frac{-g_{ij} - (\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j}) - \Gamma_{ij}^m \frac{\partial \psi}{\partial x^m}}{\sqrt{2\psi + g^{ab} \frac{\partial \psi}{\partial x^a} \frac{\partial \psi}{\partial x^b}}}$$

である。(5.7) と (5.12) から

$$(5.14) \quad g_{ij} V^i V^j - V^0 V^0 = -2\psi$$

即ち固定される超球 V^λ は $\psi = \text{const}$ の超曲面上の各点から同じ共通切線距離にある。

以上を要約すると次の表の様になる。

	固定される超球	Γ_{ij}^0 の形
A	$V^\lambda = \begin{cases} V^i & (\lambda=i) \\ 0 & (\lambda=0) \end{cases}$	$\frac{\partial V^i}{\partial x^j} + \Gamma_{mj}^i V^m + \delta_j^i = 0$ $\Gamma_{mj}^0 V^m = 0.$
B	$V^\lambda = \begin{cases} 0 & (\lambda=i) \\ V^0 & (\lambda=0) \end{cases}$	$\Gamma_{ij}^0 = C g_{ij}$ (Cは定数)
C	$V^\lambda = \begin{cases} V^i & (\lambda=i) \\ V^0 & (\lambda=0) \end{cases}$	$\Gamma_{ij}^0 = \frac{-g_{ij} - (\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j}) - \Gamma_{ij}^a \frac{\partial \psi}{\partial x^a}}{\sqrt{2\psi + g^{ab} \frac{\partial \psi}{\partial x^a} \frac{\partial \psi}{\partial x^b}}}$

§6. 二つの超球が固定される L_n の構造

BとCが共に成立つ場合を考える。即ち、各点 (x^i) を中心とする超球の他に更に超一般の位置にある V^λ と云ふ超球が一つ固定される場合はどうか。此の時は

§4 から

$$(6.1) \quad \Gamma_{ij}^0 = C g_{ij}, \quad \Gamma_{0k}^i = C \delta_k^i.$$

であるから (5.3) (5.7) (5.12) から

$$(6.2) \begin{cases} (a) & \frac{\partial V^i}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^i V^j + C \delta_R^i V^0 + \delta_R^i = 0 \\ (b) & V^i = g^{im} \frac{\partial \varphi}{\partial x^m} \\ (c) & V^0 = \sqrt{2\varphi + g^{ab} \frac{\partial \varphi}{\partial x^a} \frac{\partial \varphi}{\partial x^b}} \end{cases}$$

である。

この際 $\varphi = \text{const}$ の超曲面は固有全降超曲面であることが分る。それは、 V^i は (6.2b) なら $\varphi = \text{const}$ の超曲面の法ベクトル n^i に比例するから、

$$V^i = \rho n^i$$

とおける。又 $\varphi = \text{const}$ のパラメータ表示を

$$x^i = x^i(u^A) \quad (A=1, \dots, n-1)$$

とすれば (6.2a) から次の式を得る。

$$(6.3) \quad d(\rho n^i) + \Gamma_{jk}^i \rho n^j dx^k + (CV^0 + 1) dx^i = 0$$

即ち、

$$(6.4) \quad n^i d\rho + \rho \left(-\frac{\partial x^i}{\partial u^B} H^B_A \right) du^B + (CV^0 + 1) \frac{\partial x^i}{\partial u^A} du^A = 0$$

du^A は任意であるから、 n^i と $\frac{\partial x^i}{\partial u^A}$ の係数を各0と置けば

$$(6.5) \quad \rho = \text{const} \quad (\varphi = \text{const} \text{ の上で})$$

及び

$$(6.6) \quad H^B_A = \frac{CV^0 + 1}{\rho} \delta^B_A$$

又 (6.2c) と (6.5) と

$$(6.7) \quad \rho^2 = g_{ij} V^i V^j = g^{ab} \frac{\partial \varphi}{\partial x^a} \frac{\partial \varphi}{\partial x^b}$$

から

$$(6.8) \quad V^0 = \text{const} \quad (\varphi = \text{const} \text{ の上で})$$

故に (6.6) から

$$(6.9) \quad H^B_A = C' \delta^B_A \quad (C' = \text{const}, \varphi = \text{const} \text{ 上で})$$

即ち $\varphi = \text{const}$ の超曲面は固有全降超曲面である。

次に $\varphi = \text{const}$ の超曲面群の直交曲線は測地線である。

何れ $x^i = x^i(t)$ をかゝる直交曲線とすれば次の様に書く。

$$(6.10) \quad V^i = \frac{dx^i}{dt}$$

而して (6.2a) より

$$(6.11) \quad \frac{dV^i}{dt} + \Gamma_{jk}^i V^j \frac{dx^k}{dt} + (CV^0 + 1) \frac{dx^i}{dt} = 0$$

であるから (6.10) を代入して、

$$(6.12) \quad \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} + (CV^0 + 1) \frac{dx^i}{dt} = 0.$$

之は測地線の方程式に他ならない。即ち此の場合 R_n は直線曲線が基底線としてある様だ ∞^1 の固有全周超曲面を含む と云ふことになる。

(1948. 5. 10)