95. 線状座標空間ノ弱収斂ト強収斂トガ一致スルタメノ條件

京都工專　花井七郎

(1943. 4. 28)

無限聯立一次方程式ノ研究ノタメニ，G. Köthe O. Toeplitz ガ Journal Math. 171 (1934) ニテ論ジタ線状座標空間ニ於テ弱収斂ト強収斂トガ一致スル空間ノ例ヲ同論文ニ示シテアルガ，一致スルタメノ條件ハ求メラレテヰナイ。Hilbert 空間ニテハ一ツノ点列デ弱収斂ト強収斂トガ一致スルタメノ條件ガ F. Riesz[1] ノ著書ニアルガ、ソノ條件ニ類似ノ形デ、線状座標空間ノ場合ニ條件ヲ求メテ見ル。

簡單ノタメニ、定義、記号等ハ此処デハ述ベナイガ、スベテ上記ノ論文ニ従フコトトスル。

〔定理〕1. 線状座標空間 $\lambda \supseteq \varphi$ ニ於テ弱収斂ト強収斂トガ一致スルタメノ必要且十分ナル條件ハ次ノ (i), (ii) ガ同時ニ成立スルコトデアル。

(i) λ^* ノ任意ノ有界 (*beschraenkt*) 集合ニハ，λ^* ノ点ニ弱収斂スル部分列ガ存在スル (即局所弱コムパクトデアル)

(ii) λ, λ^* ノ任意ノ点列ヲ夫々 $\{\mathfrak{x}^{(n)}\}$ $\{\mathfrak{u}^{(n)}\}$ トシ，$\mathfrak{x}^{(n)} \to \mathfrak{x}$ (弱)，$\mathfrak{u}^{(n)} \to \mathfrak{u}$ (弱) ナルトキ $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{u}^{(n)}\mathfrak{x}^{(n)} = \mathfrak{u}\mathfrak{x}$

〔証明〕 必要ナルコト。

(i) ニツイテ、若シ有界ナ λ^* ノ点列 $\{\mathfrak{u}^{(n)}\}$ ガアッテ，λ^* ノ点ニ弱収斂シナイトスル。

然ルトキハ λ ノ一点 $\mathfrak{x}$ ガ存在シテ

$|(\breve{u}^{(i)}-\breve{u}^{(j)})\,g| \geqq m > 0$ （但シi, jハ$\{n\}$ノ部分列$\{n\}$ニ含マレルトス）ナル如キ一定数mガ存在スル。

然ルニgノ第n成分g_nヲトレバ，$\lambda \geqq \varphi$ナルヲ以テ$g_n \to g$（弱）デアル。[2]

故ニ仮定ニヨツテ$g_n \to g$（強）。　而シテ

$$0 < m = |(\breve{u}^{(i)}-\breve{u}^{(j)})\,g| \leqq |(\breve{u}^{(i)}-\breve{u}^{(j)})(g-g_n)| + |(\breve{u}^{(i)}-\breve{u}^{(j)})\,g_n|$$

然ルニ$\{\breve{u}^{(i)}-\breve{u}^{(j)}\}$ナル集合ハ有界デアル。（$\because$ $\{\breve{u}^{(n)}\}$ガ有界）

故ニ任意ノ$\varepsilon > 0$ニ対シテ$n \geqq n_0(\varepsilon)$ナルスベテノnニ対シテ

$$\sup_{i,j} |(\breve{u}^{(i)}-\breve{u}^{(j)})(g-g_n)| \leqq \varepsilon$$

ガ成立スル如キ正数$n_0(\varepsilon)$ガ存在スル。

今$n_1 \geqq n_0(\varepsilon)$ナル$n_1$ヲ固定シテ，$\varepsilon$，$n_1$ニ対応シテ$N(\varepsilon, n_1) > 0$ガ定マリ，$\{n'\}$ノ部分列$\{n''\}$ガ存在シテ$\{n''\}$ニ属シ且ツ$N(\varepsilon, n_1)$ヨリ大ナル$k, l$ニ對シテ

$$|(\breve{u}^{(k)}-\breve{u}^{(l)})\,g_{n_1}| \leqq \varepsilon.$$

ガ成立スル。（$\because$ $\{\breve{u}^{(n)}\}$ガ有界）

故ニ　　$0 < m \leqq |(\breve{u}^{(k)}-\breve{u}^{(l)})\,g| \leqq 2\,\varepsilon.$

之ハ不合理デアル。

(ii)ニツイテ。

$$|\breve{u}^{(n)}g^{(n)}-\breve{u}g| \leqq |\breve{u}^{(n)}(g^{(n)}-g)| + |(\breve{u}^{(n)}-\breve{u})\,g|$$

然ルニ$\breve{u}^{(n)} \to \breve{u}$（弱）ナルヲ以テ$|(\breve{u}^{(n)}-\breve{u})\,g| \to 0$ $(n \to \infty)$

又仮定ニヨツテ　　$g^{(n)} \to g$（強）　而シテ$\{\breve{u}^{(n)}\}$ハ有界デアル。

$$\therefore \sup_n |\breve{u}^{(n)}(g^{(m)}-g)| \to 0 \quad (m \to \infty)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \breve{u}^{(n)} g^{(n)} = \breve{u} g.$$

<u>十分ナルコト</u>　　(i), (ii)ガ成立シタトスル。

今λ^*ノ任意ノ有界集合ヲNトスル。$g^{(n)} \to g$（弱）トスレバ，$\{g^{(n)}-g\}$ハ有界デアル。[3]

従ツテ$\{g^{(n)}-g\}, n \geqq 1$；$\{g^{(n)}-g\}, n \geqq 2$；……ニ對応シテ正数$r_1, r_2, \cdots$ガ存在シテ[4]

$$\sup_{\breve{u}\in N}|\breve{u}(\mathfrak{g}^{(n)}-\mathfrak{g})| \leqq r_1 \qquad n\geqq 1\ ;$$

$$\sup_{\breve{u}\in N}|\breve{u}(\mathfrak{g}^{(n)}-\mathfrak{g})| \leqq r_2\ , \qquad n\geqq 2\ :$$

------ -- --------- ---------

明カニ $r_1 \geqq r_2 \geqq \cdots\cdots \geqq 0$

今 $\mathfrak{g}^{(n)} \to \mathfrak{g}$ (弱) デナイトセヨ．然ルトキハ

$$\lim_{i\to\infty} r_i = r > 0.$$

従ツテ $r>\delta>0$ ナル δ ヲトルトキ

$$\left.\begin{array}{l} |\breve{u}^{(1)}(\mathfrak{g}^{(n_1)}-\mathfrak{g})| > r_1-\delta, \\ |\breve{u}^{(2)}(\mathfrak{g}^{(n_2)}-\mathfrak{g})| > r_2-\delta, \\ \text{-------------------} \end{array}\right\} \qquad (1)$$

ナル如キ $\{\mathfrak{g}^{(n)}\}$ 及ビ N ノ部分列 $\{\mathfrak{g}^{(n_i)}\}$ 及ビ $\{\breve{u}^{(i)}\}$ ガ存在スル．然ルニ仮定 (i) ニヨッテ $\{\breve{u}^{(i)}\}$ ノ部分列 $\{\breve{u}^{(j)}\}$ ガ存在シテ．

$$\breve{u}^{(j)} \to \breve{u}\ (\text{弱}) \qquad \breve{u}\in\lambda^*$$

今 (1) ニ於テ $\breve{u}^{(j)}$ ニ対応スル $\{\mathfrak{g}^{(n_i)}\}$ ノ部分列ヲ $\{\mathfrak{g}^{(n_j)}\}$ トスル．

$$\mathfrak{g}^{(n_i)} \to \mathfrak{g}\ (\text{弱})\ \text{ナル故ニ}\ \mathfrak{g}^{(n_j)} \to \mathfrak{g}\ (\text{弱})$$

然ルニ

$$0 < r-\delta \leqq |\breve{u}^{(j)}(\mathfrak{g}^{(n_j)}-\mathfrak{g})| \leqq |\breve{u}^{(j)}\mathfrak{g}^{(n_j)}-\breve{u}\mathfrak{g}|+|(\breve{u}^{(j)}-\breve{u})\mathfrak{g}|$$

仮定 (ii) ニヨッテ $\quad \breve{u}^{(j)}\mathfrak{g}^{(n_j)} \to \breve{u}\mathfrak{g}\ (j\to\infty)$,

又 $\breve{u}^{(j)}\mathfrak{g} \to \breve{u}\mathfrak{g}\ (j\to\infty)$ 之ハ不合理デアル

(証 終)

$\lambda \geqq \varphi$ 且ツ normal デアルトキハ λ デ定義サレリ弱連続ナ加法的汎函数 $f(\mathfrak{g})$ ハ $\breve{u}_f\mathfrak{g}$ (但シ $\breve{u}_f\in\lambda$) ナル形デ表ハサレルコトハ既知デアルガ．弱連続ナ加法的汎函数ニツイテ次ノ定理ヲ得ル．

〔定理〕2．線状座標空間 $\lambda \geqq \varphi$ ガ normal トスル．λ^* ハ局所弱コムパクトトスル．λ ノ任意ノ点 $\mathfrak{g}$．λ^* ノ任意ノ点列 $\{\breve{u}^{(n)}\}$ ニテ $\breve{u}^{(n)} \to \breve{u}$ (弱) $\breve{u}\in\lambda^*$ ナルトキ $\lim\limits_{n\to\infty}\breve{u}^{(n)}\mathfrak{g}_n = \breve{u}\mathfrak{g}$ (但シ $\mathfrak{g}_n$ ハ $\mathfrak{g}$ ノ第 n 截片) ガ成立スルトスル．

然ルトキハ λ デ定義サレタ任意ノ弱連続ナ加法的汎函数 $f(\mathfrak{g})$ ニ対応シテ λ^* ノ

点 $\breve{u}_f$ ガ定マリ

$$f(\mathfrak{z}) = \breve{u}_f\, \mathfrak{z}.$$

逆ニ $f(\mathfrak{z}) = \breve{u}_f\, \mathfrak{z}$. $\breve{u}_f \in \lambda^*$ ナルトキハ $f(\mathfrak{z})$ ハ強連続ナ加法的汎函数デアル.

〔証　明〕　証明ハ Köthe ノ論文[5] ト同様ニシテ次ノ如クスル.

$\lambda \supseteq \varphi$ ナルヲ以テ　$\mathfrak{z}_n \to \mathfrak{z}$ (弱)

従ツテ〔定理〕1ノ証明ト同様ニシテ

$$\mathfrak{z}_n \to \mathfrak{z}\ (強)$$

ナルコトガ容易ニ分ル.

今 $\mathfrak{z}_n = x_1 n_1 + x_2 n_2 + \cdots\cdots + x_n n_n$　トスル.

但シ　$n_i = (0, \cdots, 0\ \overset{i}{1},\ 0, \cdots\cdots)$　トスル.

$f(\mathfrak{z})$ ハ弱連続ナ加法的汎函数デアルカラ.

$$f(\mathfrak{z}_n) = x_1 f(n_1) + x_2 f(n_2) + \cdots + x_n f(n_n)$$

且ツ.　$\lim\limits_{n\to\infty} f(\mathfrak{z}_n) = f(\mathfrak{z})$

$$f(\mathfrak{z}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(n_i)$$

然ルニ λ ハ normal デアルカラ $\breve{u}_f = (f(n_1), f(n_2) \cdots\cdots)$ ハ λ^* ノ点デアル.

$$\therefore\ f(\mathfrak{z}) = \breve{u}_f\, \mathfrak{z}$$

逆ニ $f(\mathfrak{z}) = \breve{u}_f\, \mathfrak{z}$. $\breve{u}_f \in \lambda^*$ ナルトキハ. $f(\mathfrak{z})$ ハ弱連続デアルコトヨリ. $\breve{u}_f\, \mathfrak{z}$ ハ強連続デアル.　　〔証　終〕

終リニ臨ミ. 以上述ベタコトハ 1947年12月日本数学会京都支部々会ニテ発表セルモノデアルコトヲ此処ニ附記スル

---

1). F. Riesz; Les systemes d'équations linéaires a une infinite d inconnues　P. 96.

2)　G. Köthe, O. Toeplitz ノ前記論文　P. 198

3). 同　上　P. 204

4). 同　上　P. 201

5). G. Köthe; Math. Ann, 114 (1937). P. 106