

93. E^n の合同変換群の位相幾何學的特徴づけ

寺 阪 英 考 (1948. Ⅱ 29)

§1. Hilbert の *Grundlagen der Geometrie* (1930年版) の附録 IV にある. 平面幾何學の位相幾何學的基礎づけは. Kerékjártó や Montgomery & Zippen によつて三次元に至まで拡張されてある. (*Trans. Amer. Math. Soc.* 43 (1940) の M. & Z. 氏論文参照) 一方 Hilbert も指摘してある折返しを基にする方法は. Cairns が実行したが. M & Z. 両氏も言及してゐるやうに. 空間の場合にも軸の同りの廻轉といふことを基にして空間幾何學の基礎づけをする可能性があつた. 事實二次空間では S^3 の向き変へない対合的位相変換では不動の Jordan 曲線が生ずる. といふ Smith の定理があつて平面の場合と大体同じに進むことが出来る.

近頃これを考へてゐる中に. n 次元 Euclid 又は non-Euclid 空間の幾何

学も超の例の、 E^n ぶつ切られることがわかつたので 軽くあらましを御話
する。

§2. 空間は E^n ($n \geq 2$) とする, E^n の射影的値用変換 T (即ち $T^2 = 1$)
で、直線の一対一開連続像 — これを軸といふことにする — を不動点集合とするもの
を考え、これを軸対称 *axial symmetrization* といふことにする。
[$n=2$ なら折返し $n=3$ なら直線の周りの 180° の回転に位相同等である。
 $n \geq 4$ の場合は考へられておただらうか?]

次にこゝで採用しようとする公理をあげる。

公理 I. E^n は軸対称 及びそれの有限個の結合からなる. E^n の直交変換群 O_n .

公理 II₁. E^n の任意の相異なる二点 a, b に對し, a, b を不動点とする軸対称 T
が O_n の中に唯一つ存在する。

公理 II₂. $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$ $a \neq b$ のとき, a_n, b_n を不動点とする
軸対称 T_n は, a, b を不動点とする軸対称 T に収斂する. [即ち E^n
の各点 x に對し $T_n(x) \rightarrow T(x)$]

公理 III. $a \neq b$ ならば, 第三の点 c に對し直線 $l \ni c$ が存在して, l のどの
変換によつても a, b を二つとも同時に l の中に寫像することは出来
ない [変換に直り絡みなし]

《以上の如く公理 I, II₁, II₂, III によつて E^n が合同変換が位相幾何学的
に行動づけられる》といふのが定理である。

こゝときしも II₂ が不用であることが分れば, 既知の場合と公理の数が一致する。

§3. 証明は可成り長いので筋道だけ述べる。

異なる二点 a, b を不動点とする E^n の軸対称 T は唯一つあるから, T の不動点集合
— T の軸 — は a, b で決定される. これを $a \cup b$ で表はす. T の軸をギリシ
ヤ文字 α で表はす. これが違らうとする幾何学の面積である。

今 AB なる二つの異なる軸対称を考へる. B の軸 β が A で $\beta' = A(\beta)$ に移
つたとすれば, β' は ABA で不動. 又 β' 以外の点は動き, 且 $(ABA)^2 = 1$ だ
るから 《 ABA は $A(\beta)$ を軸とする軸対称である。》

今 $c \in \alpha$ が A で $c = A(c)$ に移つたとすれば $\gamma = c \cup c'$ の A による像

$A(f)$ は C, C' を通る線であるから f と一致しなければならぬ。すると A によって γ 上の点は逆向の交換をうけるから γ 上には A による不動点が生ずる。これは加群 A の軸 α 上になければならぬ。よつて

$$Y = C \cup C' = C \cup A(C)$$

は α と交はる所で $\gamma = C \cup A(C)$ を軸とする軸付線 C とすれば 恒定理により

ACA は $A(\gamma)$ を軸とする線であるから $A(\gamma) = \gamma$ より $ACA = C$ 。即ち

$$(1) \quad AC = CA$$

然るに (1) が成立すれば今と逆のことが成立する。

《(1) が成立するとき 二軸 α, γ は互に直交する》といひ 交点 $\alpha \cap \gamma$ を C から α への射影 (又は垂線の足) といひ、

《射影点の連続函数である》

すると二点 a, b に対し 動点 X が a に近ければ点 $Q = b = \alpha$ への垂線の足は α に近く、又この垂線 ξ に対し a の射影 $a' = X(a)$ は a にさう、 X が b に近ければ同じことが b について言へる。よつて或る X が存在し、 α から α への垂線 ξ に対する a の射影 $X(a)$ が b に一致する。このとき α から α への射影は a, b の中点の性質をもつので、線分 $[a, b]$ の中点といひ、これより軸上には互に合同な線分が軸対称によつて定められることが分る。

次に線分 α についての一様連続性が出せる。それには先づ

$$a_n \rightarrow a, \quad b_n \rightarrow a$$

のとき $a_n \cup b_n$ 上の線分 $[a_n, b_n]$ も $\rightarrow a$ であることを帰理法によつて証明し、それより一様収斂を出す。

すると一点 O を通る軸は正則な曲線群になるから、その *cross-cut* たる球状形 S が考へられ S 上の寫像を適当に考へることにより二軸 $O \cup X \cup Y$ の二等分線の存在が証明される。これより異なる軸上の線分 α についても合同 (長短) が云々出来ることになつて空間の合同変換が確立する。

こゝで得られる幾何学は *Euclid R* 及び双曲線幾何学である。