# 86. 多変数解析函数について

## 1. - Bergmannの問題

吉田 紀雄

(1932. II. 16)

$n$個の複素数 $z_1, z_2, \dots, z_n$ の空間を考へ、$\mathfrak{D}$をこの空間の一つの領域とする。$\mathfrak{D}$に零点の分布(S)を任意に而かも局所的に与へたとき、$\mathfrak{D}$に於て正則で且丁度(S)を零点に持つ函数を求める問題をCousinの第二問題と呼んでゐる。$\mathfrak{D}$は如何なる零点の分布を与へても求める函数が常に存在するとき$\mathfrak{D}$に於てCousinの第二問題が解けると、或は$\mathfrak{D}$は第二Cousin域であると言はれる。一変数の空間に於ては Weierstrassの定理によりよく知られてゐる如く凡ての領域が第二Cousin域である。併し変数の数が2つ以上になると第二Cousin域は非常な制限を受ける。或る領域が第二Cousin域であるための必要條件並びに十分條件は Cousin(1895)以来多くの人々特に Gronwall, H. Cartan, K. Oka, K. Stein 等に依つて研究され、多変数函数論に於て最も重要なる問題の一つとなつてゐる。

さてこのCousinの問題に於けるやうに零点の分布を局所的に与へては与へられた零点を丁度零点として持つやうな函数は必ずしも存在しないので、S. Bergmann[1)]は零点の与へ方を全局的にした場合如何なる條件の許に求める函数が常に存在するかと云ふ問題を考へた。次に問題を具体的に説明しよう。

$g(z_1, z_2, \dots, z_n)$ を領域$\mathfrak{D}$に於て恒等的には零でない正則函数とし、且少くとも一つ零点を持つとする。$\mathfrak{D}$に於て正則な(或は有理型な)函数 $F(z_1, z_2, \dots, z_n)$ が$\mathfrak{D}$内にある$g$の凡ての零点に於て、少くとも$g$と同じorderで零となるとき $F$は$g$を零点函数として持つと云ふことにする。特に$F$が$g$の一つの零

点Pに於て少くともgと同じorderで零となると云ふのは、Pが必ず下の正則点か不定点かであつて、且正則点である場合には$f/g$がPに於て正則なることを云ふ。そこでBergmannは次の問題を考へた。

《 $D$ に於て正則な函数 $g_m$ $(m=1,2,\cdots)$ を任意に与へたとき、$D$に於て正則(又は有理型)で且 $g_m$ を丁度零点函数としてゐる函数$f$は如何なる條件の許に常に存在するか》

勿論 斯る函数$f$が存在するためには、零面 $g_m=0$ $(m=1,2,\cdots)$ は$D$内の如何なる点に集積してもいけない。それ故我々は此の條件はいつも満たされてゐるものとして議論を進めて行つてよい。$f$が$g_m$ $(m=1,2,\cdots)$を丁度零点函数として持つと云ふのは $f$が $g_m$ $(m=1,2,\cdots)$ の零点以外には決して零点を持たず、且Pを$g_m$の任意の零点とすると Pは$f$の正則点か不定点である場合にはPを零点とする$g_m$の全部を $g_{m_1}, g_{m_2}, \cdots g_{m_\nu}$ 一般には限り必ず有限個であることとすると、

$$\frac{f}{g_{m_1} \cdot g_{m_2} \cdots\cdots g_{m_\nu}}$$

がPに於て正則であつて且0でないことを云ふ。

以上説明した如くCousinの第二問題とBergmannの問題は共に与へられた零点を持つ函数を求める問題であるが 只その零点の与へ方が異るのみである。問題の重要性から云ふと Bergmannの問題はつまらない。Cousinのとは比較にならない。

Bergmannは二変数 $z_1, z_2$ の空間でこの問題を考へ、この問題が解けるための一つの十分條件を出してゐるが その條件は複雑で 問題の本質を衝いてゐない。次いでBehnke-Thullen[2]は次の結果を出してゐる。

(A) 与へられた零点を持つ有理型函数は常に存在する。

(B) $D$ が Poincaré域ならば 求める正則函数も存在する。

(C), $D$ に次の二つの條件を満足する部分領域の列 $D_1, D_2, \cdots D_m, \cdots$ が存在するならば 与へられた零点を持つ正則函数も存在する。

(i) $D_m \subset D_{m+1} \ll D \quad \lim D_{m+1} = D$

(ii) $D_m$ に於て正則な函数は $D$ に於て正則な函数を項とし且 $D_m$ に於て一様収斂をする級数に展開出来る。

この話に就て見て行かう。先づ(A)は次のやうな無限乗積

$$\prod \left(1-\frac{1}{C_m g_m+1}\right)$$

を作ることに依って容易に得られる。茲に $C_m$ はこの無限乗積の收斂の一様性を確保するために十分大きく 且零面 $g_m=0$ と極面 $C_m g_m+1=0$ $(m=1,2\cdots)$ が一致しないやうにとればよい。次に(E)を見よう。$\mathfrak{D}$ が Poincaré 域とは $\mathfrak{D}$ に於て有理型な任意の函数が $\mathfrak{D}$ に於て正則な且互に素な二つの函数の商として表はされることを云ふ。如何なる領域が Poincaré 域であるかと云ふ問題は Bergmann のこの問題よりももっと非常に重要な且困難な問題であって未だ十分に分ってゐないから(B)はつまらない さて(C)であるが條件(ii)が大変である上に Behnke-Thullen の証明は $\mathfrak{D}_m$ に相対的に單連結であると云ふ條件を課さなければ正しくない。そこで條件(ii)が如何なるとき満されるかを考へるに，先づ $\mathfrak{D}$ が單葉且有限な正則域であるときには必ず満される。即ち

α) $\mathfrak{D}$ が單葉な且無限遠点を含まない正則域

で且 β) 次のやうな部分領域の列 $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \cdots, \mathfrak{D}_m, \cdots$

$\mathfrak{D}_m$ : 相対的に單連結

$$\mathfrak{D}_m \Subset \mathfrak{D}, \quad \lim \mathfrak{D}_m = \mathfrak{D}$$

が存在するとき，求める函数は必ず存在することを証明しよう。

正数 $P$ を十分大きくとって Polyzylinder

$$Z: \ |z_\nu| < P \quad (\nu = 1,2,\cdots,n)$$

が $\mathfrak{D}_m$ を全く内に含むやうにし，$Z$ と $\mathfrak{D}$ との Durchschnitt を $\Delta$ とする。$\mathfrak{D}$ に於て正則な函数全部の集りを $\mathfrak{F}$ とすると，$\Delta$ は Cartan-Thullen の定理に依り $\mathfrak{F}$-konvex である。従って $\mathfrak{F}$ の函数 $f_1,\cdots f_\mu$ を適当にとって 開集合

$$\mathfrak{D}_m^*: \ |f_\nu^{(m)}|<1 \quad (\nu=1,2,\cdots,\mu_m)$$

を作り $\quad \mathfrak{D}_m \Subset \mathfrak{D}_m^* \Subset \Delta$

ならしめることが出来る。

ここで我々は $\mathfrak{D}_m \Subset \mathfrak{D}_m^* \Subset \mathfrak{D}_{m+1}$ .. $(m=1,2,\cdots)$ なる関係が成立するとしよう。若しさうでないときは $\mathfrak{D}_m$ の適当な部分列をとればよいから。

次に$\mathfrak{D}_2$に零点を持つ函数$g_m$の個数は有限であるからその積を$G_1$とし，$\mathfrak{D}_{m+2}$に零点を持ち且$\mathfrak{D}_{m+1}$には零点を持たない$g_m$の個数は矢張有限であるから，その全部の積を$G_{m+1}$とする。

$G_{m+1}$は$\mathfrak{D}_{m+1}$で零点を持たず且$\mathfrak{D}_{m+1}$は仮定に依り線的に単連結であるから$\log G_{m+1}$は$\mathfrak{D}_{m+1}$で一価正則従って$\mathfrak{D}_m^*$に於てもそうである。そこで$(n+\mu_m)$個の複素数$(z_1,\cdots,z_n,w_1,\cdots,w_{\mu_m})$の空間において閉円有面

$$\mathfrak{f}_m:\ w_\nu=f_\nu^{(m)}(z_1,\cdots,z_n)\quad \nu=1,\cdots,\mu_m$$
$$(z_1,\cdots,z_n)\in\mathfrak{D}_m^*$$

を作り$\log G_{m+1}$を$(n+\mu_m)$個の変数$(z,w)$の函数と考へると此は$\mathfrak{f}_m$の近傍で正則である。K. Oka[3]の正則域に関する基本定理に依ると$\mathfrak{f}_m$はPolynombereich で依り外部より近似さることが出来る。従って$\mathfrak{f}_m$を含むPolynombereich $\mathfrak{P}_m$を$\mathfrak{f}_m$に十分近くとると，$\log G_{m+1}$は$\mathfrak{P}_m$で正則である。A. Weil及びK. Oka[4]に依りPolynombereichに於て正則な函数はそこに於て広義に一様収斂する多項式を項とする級数に展開出来るから，$\log G_{m+1}$は$\mathfrak{P}_m$で，$z_1,\cdots,z_n,w_1,\cdots,w_{\mu_m}$の多項式の級数に展開出来る。この級数に於て

$$w_\nu=f_\nu^{(m)}(z_1,\cdots,z_n),\ (\nu=1,\cdots,\mu_m)$$

とおくと，$\log G_{m+1}$は$\mathfrak{D}_m^*$に於て一様収斂する級数に展開されることが分る。而かもこの級数の項は$z_1,\cdots,z_n$及び$f_\nu^{(m)}(\nu=1,\cdots,\mu_m)$の多項式である。

この級数の部分和$\varphi_{m+1}$を適当にとり，

$$\log G_{m+1}=\varphi_{m+1}+R_{m+1}$$

としたとき$\mathfrak{D}_m^*$に於て$|R_{m+1}|<\frac{1}{2^m}$

ならしめる。こゝに於て無限乗積

$$\prod_{m=1}^{\infty}G_m\cdot e^{-\varphi_m}\qquad(\varphi_1\equiv 1)$$

を作るときは$\mathfrak{D}$に於て正則且$g_m\ (m=1,2,\cdots)$を丁度零点函数としてゐる。

振り返って條件α)，β)を考えて見るに，先づ條件β)は甚だ面白くない。これは求める函数を無限乗積で表はさうと云ふ自然ではあるがprimitiveな証明法の異である。條件α)も問題であるが，こゝではBehnke-Thullenの証明の不備を指摘するに止める。

1) Über die Nullstellen e. Funkt von zwei kompl. Veränd.
Proc Koninkl Akad. v. Wetensch Amsterdam Bd. 35. (1932)
2) Über die Verallgemeinerung des Weierstrasschen Produktsatzes
Math Ann. Bd. 109 (1934)
3) Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables
II – Domaines d'holomorphie
Journal of Hiroshima Univ. (1937)
4) Domaines convexes par rapport aux fonctions rationnelles.
Journal of Hiroshima Univ (1936)
(9. 2. 48)