84. l-group ノ定義ニツイテ

(大阪理工大) 逗浦 正 (1948.II.10)

lattice ordered group (以下單ニ l-group トイフ) ノ今迄ノ定義ト同値ナ條件ヲ述ベマス. (l-group ノ定義ニツイテハ Birkhoff ノ論文 [2]) ヲ参照)

定理 1. l-group ハ各 element ニ對シテ次ノ條件 α)–δ) ヲ充ス 1ツノ unary operation $a \to a^*$ ガ与ヘラレタ group トシテ定義スルコトガ出来ル.

α) $0^* = 0$

β) $c = -(-c)^* + c^*$

γ) operation $(a-b)^* + b$ ガ associative.

δ) 任意ノ x ニ對シ $a + x^* - a = (a + x - a)^*$

證明 l-group ガコレラノ條件ヲ滿スコトハ $a^* = a \cup 0$ トオクコトニヨリ容易ニ見ラレル. 逆ニコレガ l-group ヲ与ヘルコトハ 次ノ Stone ノ公理ヲ滿足シテイル コトヲ 験証スレバヨイ。

Stone ノ條件. l-group ハ次ノ條件ヲ滿ス operation $\cup$ ヲ有スル group トシテ定義セラレル.

a) $a \cup a = a$

b) $a \cup b = b \cup a$

c) $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$

d) $a + (x \cup y) = (a + x) \cup (a + y)$

e) $(x \cup y) + a = (x + a) \cup (y + a)$ [1])

以上ノ様ナ unary operation ヲ与ヘラレテイル group ニ於テ $(a-b)^* + b = a \cup b$ トオケバ α)ニヨリ a)ガ, β)ニヨリ b)ガ又 γ)ニヨリ c)ガ得ラレル. 更ニ δ)ニヨリ

$$(a+x) \cup (a+y) = \left((a+x)-(a+y)\right)^* + (a+y) = (a + (x-y) - a)^* + a + y$$

$$= a + (x-y)^* - a + a + y$$

$$= a + (x-y)^{*} + y$$

$$= a + (x \cup y)$$

又 e) ハ直チニ認ラレル.

$$(x+a) \cup (y+a) = \big((x+a)-(y+a)\big)^{*} + (y+a)$$

$$= (x-y)^{*} + y + a = (x \cup y) + a$$

依ッテ定理ハ証明セラレタ.

---

1) Stone ハ group ガ commutative ナルコトヲ仮定シテイルノデ 條件 e) ハ省略サラレテイル. M. H. Stone: a general theory of spectra II, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 26 (1940)

2) G. Birkhoff. Lattice ordered groups. Annals of Math., 43. (1942)