80. 双線素 Riemann 空間ニ就テ [1]

(京師)　田畑不二夫　(1947-2-2)

§1. V_n ヲ n 次元集合体ソノ座標 u^λ ($\lambda=1,\cdots,n$) ハ実数ヲトルモノトシテ.

u^λニ於ケルV_nノ切線Euklid空間ヲ二ツノ線型空間 O_g, k_g ニ分解スル

ココニ夫々ノ次数ハq, p ($q+p=n$) トスルナラバ O_g k_g ニ対シテ rank ガ p q. n ナル対称 Tensor $g_{\lambda\mu}$ $g_{\lambda\mu}$ $h_{\lambda\mu}+g_{\lambda\mu}$ ヲ適当ニ択ブ事ニヨッテ O_g k_g ガ夫々 $h_{\lambda\alpha}g^\alpha=0$ $g_{\lambda\alpha}h^\alpha=0$ ナル Vector g^λ h^λ ノ集合デアルヤウニスル事ガ出来ル。

□2 $g_{\lambda\mu}$. $h_{\lambda\mu}$ ハ考フル領域デ必要ニ応ジテ何回デモ連続微分可能トシテ O_g. k_g ガ holonom 集合体デアルタメノ条件ハ $g^\alpha g^\beta {}_h\Gamma_{\lambda\alpha;\beta}=0=h^\alpha h^\beta {}_g\Gamma_{\lambda\alpha;\beta}$ ナル事デアル。ココニ ${}_h\Gamma_{\lambda\mu,\nu}$ ノ h ハ $h_{\lambda\mu}$ ヨリ作ラレル事ヲ示ス。

□3. O_g k_g ニ夫々計量 dS, $d\tau$ ヲ賦與スルノデアルガ、コノ O_g k_g. dS. $d\tau$ ヲ与ヘテ □2 ノ条件ヲ満シ且ツ $dS^2=g_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$ ($du^\lambda\in O_g$), $d\tau^2=h_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$ ($du^\lambda\in k_g$) ナルヤウナ $g_{\lambda\mu}$, $h_{\lambda\mu}$ ヲ定メテ見出ス事ガ出来ル。従ッテ V_n ヲソノ任意ノ du^λ ニ対シテ双計量 dS. $d\tau$ ガ定義サレタ Riemann 空間デアルト見做ス事ガ出来ル。ココニ注意シタイ事ハ $g_{\lambda\mu}$ $h_{\lambda\mu}$ ノ一次的結合例ヘバ $g_{\lambda\mu}+h_{\lambda\mu}\equiv K_{\lambda\mu}$ 或ハ $g_{\lambda\mu}+g_{\lambda\mu}=2g_{\lambda\mu}$ 等ト共ニ計量 Tensor デナイ事デアル。

□4. 此ノ注意及 $g_{\lambda\alpha}h^\alpha=0=h_{\lambda\alpha}g^\alpha$ 等ヨリ g^λ h^λ ニ対シテ夫々 $g_\lambda\equiv g_{\lambda\alpha}g^\alpha$ $h_\lambda\equiv h_{\lambda\alpha}h^\alpha$ ト定義スルノガ自然デアラウ。ソコデ任意ノ Vector $A^\lambda=g^\lambda+h^\lambda$ ナル形ニ表ハシ得ルトコロカラ A^λ ニ対シテ $A_\lambda\equiv g_\lambda+h_\lambda$ ト定義スルナラバ一般ノ Tensor ノ指標ノ上下ヲ定ムル事ガ出来ル。結果カラ見レバ $K_{\lambda\mu}$ ニヨル指標ノ上下ト何等択ブ所ハナイ。

□5. 今 $\frac{\delta g_{\lambda\mu}}{\delta u^\nu}=0=\frac{\delta h_{\lambda\mu}}{\delta u^\nu}$ ナルトキ移変ハ計量的デアルトスルナラバ

$L^\lambda_{\mu\nu}\equiv {}_g\Gamma^\lambda_{\mu\nu}+g^{\lambda\alpha}h^\beta_\mu\,{}_g\Gamma_{\alpha\nu,\beta}+{}_h\Gamma^\lambda_{\mu\nu}+h^{\lambda\alpha}g^\beta_\mu\,{}_h\Gamma_{\alpha\nu,\beta}$

ハ計量移変ヲ与ヘ、一般ノ計量移変ノ係数 $A^\lambda_{\mu\nu}=L^\lambda_{\mu\nu}+D_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$ トオク事ガ出来ル。但シ $D_{\lambda\mu\nu}+D_{\nu\mu\lambda}=0$, $g^\alpha_\lambda D_{\alpha\mu\beta}h^\beta_\nu=0$ ナル条件ガ課セラレル。

□6. Vector 場 U^λ ヲ与ヘテ之ニヨリ定マル曲線群 Γ ヲ考ヘ、之ヲ holonom 空間 O_g デ截断スレバ一種ノ射影的対応ガ得ラレル。従ッテ Γ ノ一ツノ曲線 Γ_0 ヲ与フルトキ互ニ射影的ナ Vector g^λ ノ全体ヨリ成ル野ノ集

号ガ Γ_0 ヲ軸トシテ得ラレル。

□7. コノ節ノ一ツ g^λ ヲ一次計量移変ノ係数 $A^\lambda_{\mu\nu}$ ニヨッテ $\mho^\lambda \equiv h^\lambda$（但 $h_\alpha h^\alpha = 1$）方向ニ平行移動スルナラバ $\delta g^\lambda = g^{\lambda\alpha}(-h^\beta \Gamma_{\alpha\varepsilon,\beta} + h^\beta D_{\varepsilon\beta\alpha}) g^\varepsilon \delta\tau$ デアル。若シコノトキ Γ_0 ヲ軸トシテ $\mathcal{C}_g$ ガ全体トシテハ回轉シナイナラバ、ソノ條件ハ $g^{\lambda\alpha}(h^\beta D_{\varepsilon\beta\alpha} - h^\beta D_{\alpha\beta\varepsilon}) g^\varepsilon = 0$ デアル。

次ニ $\mathcal{C}_g$ ニ屬スル共点ナル $d_1 u^\lambda$, $d_2 u^\lambda$ ヲ $d_2 u^\lambda$, $d_1 u^\lambda$ 方向ヘ夫々平行移動後ノ $d_1 u^\lambda$ $d_2 u^\lambda$ ノ全部デ四箇ノ無限小 Vector カラ成ル折線ガ閉ヂルタメノ條件ハ $D_{\alpha\beta\lambda} g^\alpha g'^\beta = 0$ デアル。

以上ニ條件ニ加フルニ之等ニ双対的ナル $h^{\lambda\alpha}(g^\beta D_{\varepsilon\beta\alpha} - g^\beta D_{\alpha\beta\varepsilon}) h^\varepsilon = 0$, $D_{\alpha\beta\lambda} h^\alpha h'^\beta = 0$ ナル條件ヲ $A^\lambda_{\mu\nu}$ ニ課スルナラバ $D_{\lambda\mu\nu} = 0$ 即コノ二組ノ條件ヲ充ス一次計量移変ノ係数ハ $L^\lambda_{\mu\nu}$ ニ限ルト云フ結論ニナル。

(1943. 1. 26)