79. Complex-Banach-spaces ニ於ケル解析函数ニツイテ (III)

(阪大)　霜田伊左衛

(1943. II. 1)

二変数複素函数論ニ於ケル Hartogs ノ定理ヲ二ツノ Complex-Banach spaces E, E' ノ積空間 $E\times E'$ デ考察シタイ. コノ為ニ必要ナ次ノ定理ヲ掲ケル.

定理 A.) $f(\lambda)$ ハ複素平面ノ領域 D ニ定義セラレ E ノ値ヲトル. y^* ハ E デノ有界ナ linear functional トシ複素数値ヲトル. 若シ凡テノ $y^*f(\lambda)$ ガ D デ可微分ナレバ $f(\lambda)$ ハ又 D デ可微分トナル.

〔定理〕. $E\times E'$ 内ノ有界領域 Δ デ定義セラレ, complex-Banach space E'' ノ値ヲトル函数 $f(x,y)$ ガ Δ ノ境界上デ正則ナレバ Δ ノ内部デ正則トナル.

〔証明〕 y^* ヲ複素数値ヲトル有界ナ linear functional トスル. (x_0, y_0) ヲ Δ ノ任意ノ点トスル. $y^*f(x_0+\alpha x, y_0+\beta y)$ ハ (α, β) ヲ変数トシ y^* ヲトル函数トナル. $(x_0+\alpha x, y_0+\beta y)$ ガ常ニ Δ 内ニアル様ニ (α, β) ガ動ケバ之ハ領域 D ヲツクル. D ノ境界デ $f(x,y)$ ハ正則デアルカラ $y^*f(x_0+\alpha x, y_0+\beta y)$ ハ D ノ境界デ正則トナル. 故ニ二変数複素函数ニ於ケル Hartogs ノ定理ニヨリ $y^*f(x_0+\alpha x, y_0+\beta y)$ ハ D 内デ正則トナル. 故ニ定理 A ニヨリ $f(x_0+\alpha x, y_0+\beta y)$ ハ D デ正則トナル. 故ニ (x_0, y_0) ニ於テ Gateaux ノ微分ガアル. (x_0, y_0) ハ任意ダカラ $f(x,y)$ ハ Δ デ常ニ Gateaux ノ微分ガアル. (x_0, y_0) ハヤハリ Δ ノ任意ノ点トシ, Δ ノ境界上ノ一ツノ点ヲ (x_0+x', y_0+y') トスル.

$(x_0+\alpha x', y_0+\alpha y')$ ガ Δ 内ニアル様ニ α ガ変化スレバ α ハ領域 D' ヲツクル. D' ノ境界 C ハ有界ナル閉集合トナル. $\alpha \in C$ ナルトキ $(x_0+\alpha x', y_0+\alpha y')$ ハ compact set G トナル. G 上デハ $f(x,y)$ ハ正則ナル故 $G \ni (x_0+\alpha x', y_0+\alpha y')$ ナルトキ任意ノ正数 ε ニ対シ $d(x,y)$, $(x_0+\alpha x',$

$y_0+\alpha' y'))<\delta$ ナルトキ.

$$\|f(x,y)-f(x_0+\alpha' x', y_0+\alpha' y')\|\le\varepsilon.$$

且 $f(x,y)$ ハGノ上デハ一様ニ有界ナル故, Gヲ有限ケノ球デ蔽ヒ其処デハ常ニ $\|f(x,y)\|\le M$ ナラシメル事ガ出来ル. Gヲ蔽フ球ノ集合ヲ Σ トスル. Σ ハ開集合ナル故ニ (x',y') ノ適当ナ近傍ヲ $U(x',y')$ トスレバ $(x_0+\alpha x, y_0+\alpha y)$ $\{\alpha\in C, (x,y)\in U((x',y'))\}$ ハ常ニ Σ ニ含マレル.

$$\therefore \|f(x_0+\alpha x, y_0+\alpha y)\|\le M.$$

α—平面デ0点カラCヘノ最短距離ヲ ρ トスレバ $f(x_0+\alpha x, y_0+\alpha y)$ ハ $\bar{D}$ デ α ニツキ正則トナルカラ $\|f(x_0+\alpha x, y_0+\alpha y)\|$ ノ最大値ハ必ズC上デトル.

$$\therefore \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{|\alpha|=\rho}\frac{f(x_0+\alpha x, y_0+\alpha y)}{\alpha^{n+1}}\,d\alpha\right\|\le\frac{M}{\rho^n}\quad\begin{pmatrix}n=0,1,2,\cdots\\(x,y)\in U(x',y')\end{pmatrix}$$

今 $f(x_0+x, y_0+y)=\sum_{n=0}^{\infty}U_n(x_0,y_0;x,y)$

トオケバ $\|U_n(x_0,y_0;x,y)\|\le\frac{M}{\rho^n}\quad((x,y)\in U(x',y'))$

$U_n(x_0,y_0;x,y)$ ハ Gateaux ノ微分ヲアリ且齊次デアルカラ 与 $U((x',y'))$ 内ノ (x',y') ヲ中心トスル球ノ半径ヲ r トスレバ. へ

$\|(x,y)\|<r$ ナルトキ. $\|U_n(x_0,y_0;x,y)\|\le\frac{M}{\rho^n}$[2]; 3+

$U_n(x_0;y;x;y)$ ハ有界ナル故 $\|(x,y)\|<r$ デ連続トナル.

$0<r_1\le 1$ ヲ $\frac{r_1}{\rho}<1$ ナル様ニトレバ $\|(x,y)\|<r_1 r(\le r)$ デ上ノ級数ハ一様収斂スルカラ, $f(x_0+x, y_0+y)$ ハ (x_0,y_0) デ連続トナル. (x_0,y_0) ハ任意ダカラ $f(x,y)$ ハ Δ デ連続トナル. 故ニ $f(x,y)$ ハ Δ デ正則トナル.

(以上)

---

1) N. Dunford Uniformity in linear spaces. Trans. Amer. Soc. 44 (1938)

2) 全国紙上数学談話会[illegible] 註 Zorn ノ定理