76. Directed system ノ cofinal type ニツイテ

白田　平

Tukey ハ "*convergence and uniformity in topology*" (1940) デ *directed system* ニ関シテ取扱ッテヰル (P14) ガ、ソレニツイテ十分ナ説明ガ為サレテヰナイ。コヽデハ一般ノ連続体ニ関スル仮定ヲ用ヒテソノ *type* 間ノ関係ヲ述ベルコトニスル。尚証明ノ III 及ビ V ハ大西サンノ考ヘヲソノママ拡大シタモノデス。

I [定義] $(\alpha.\beta)$ ハ α,β ナル順序数 $(\alpha \leqq \beta)$ ニ関シテ $\aleph_\beta$ ケノ元ヨリナル集合ノ $\aleph_\alpha$ ヨリ小ナル濃度ヲ有スルスベテノ部分集合ノナス順序ヲ包括関係ヨリ導イタ *directed system* ノ *cofinal type* ヲ表ハスモノトスル.

コノトキ (0β) ハ $\aleph_\beta$ ケノ元ヨリナル集合ノ *stack* ヲ含ム. 且

$$\mathfrak{a} = \left\{a \mid \bar{\bar{a}} < \aleph_\alpha \quad a \in W(\omega_\alpha) = \left\{\mu \mid \mu < \omega_\alpha\right\}\right\}$$

トスレバ (コヽデ $\bar{\bar{a}}$ ハ a ノ濃度ヲ表ハス)

$\mathfrak{a}' = \left\{W(\mu) \mid \mu < \omega_\alpha\right\}$ ハ $\mathfrak{a}$ ト *similar* デ且コレハ $(\alpha\alpha)$ ニ含マレ.
ω_α Type ノ *transfinite sequence* トナル.

II $(\alpha\beta) \leqq (\alpha \ \beta+\gamma) \qquad \gamma > 0$

$$\because) \quad \mathfrak{a} = \left\{a \mid \bar{\bar{a}} < \aleph_\alpha \quad a \subset M \quad \bar{\bar{M}} = \aleph_\beta \right\}$$
$$\mathfrak{b} = \left\{b \mid \bar{\bar{b}} < \aleph_\alpha \quad b \subset M' \quad M' \supset M \quad \bar{\bar{M'}} = \aleph_{\beta+\gamma} \right\}$$

トスル. 且 $b(a)=a$, $a(b)=b \wedge M$ トスレバヨイ.

III $(\alpha.\beta) \ngeq (\alpha+\delta\ \beta+\gamma)$ $\delta \geqq 0$ $\gamma \neq 0$

$\because$ $(\alpha,\beta) \geqq (\alpha+\delta,\ \beta+\gamma)$ トスル.

且 $(\alpha,\beta) \ni \mathfrak{a} = \{a \mid \overline{\overline{a}} < \aleph_\alpha \quad a \subset M \quad \overline{\overline{M}} = \aleph_\beta\}$

$(\alpha+\delta,\ \beta+\gamma) \ni \mathfrak{b} = \{b \mid \overline{\overline{b}} < \aleph_{\alpha+\delta} \quad b \subset \underset{M \subset M}{M'},\ \overline{\overline{M'}} = \aleph_{\beta+\gamma}\}$

且 $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$ トスル ($\exists\ a(b),\ b(a)$ ($a > a(b) \to b(a) > b$)

$\mathfrak{a}$ ノ元ヲ整列シテ $a_1\ a_2 \cdots a_\mu \cdots$ $|\mu < \omega_\beta$

ナゼナラバ コヽデ $\alpha < \beta$ ナラバ常ニ $\aleph_\beta^{\aleph_\alpha} = \aleph_\beta$ ガ成立スルモノトスル.

コレハ β ガ limes zahl デナイトキ連続体ノ仮定ヲ用ヒレバ出来ル.

ナゼナラバ $\beta = (\beta-1)+1$ 依テ $\aleph_\beta = 2^{\aleph_{\beta-1}}$ $\therefore \aleph_\beta^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_{\beta-1}\cdot\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_{\beta-1}}$

$= \aleph_\beta$

次ニ $\mathfrak{a}$ ノ元ノ数ハ

$$\aleph_\beta + \aleph_\beta^2 + \cdots\cdots + \aleph_\beta^{\aleph_\mu} + \cdots\cdots \quad (\aleph_\mu < \aleph_\alpha \leqq \aleph_\beta)$$

$$= \underbrace{\aleph_\beta + \aleph_\beta + \cdots\cdots + \aleph_\beta}_{\omega_\alpha} + \cdots\cdots = \aleph_\beta\ \aleph_\alpha = \aleph_\beta$$

サテ $\mathfrak{b}_\mu = \{b \mid a(b) = a_\mu\}$ トスレバ $\mathfrak{b} = \cup\,\mathfrak{b}_\mu$

且 $\cup\mathfrak{b}_\mu = \cup\{b \mid a(b) = a_\mu\}$ トスレバ $\bigcup_\mu \cup\mathfrak{b}_\mu = M'$

$\therefore (\exists\mu)(\overline{\overline{\cup\mathfrak{b}_\mu}} = \aleph_{\beta+\gamma})$

ナゼナラバ

$(\forall\mu)(\overline{\overline{\cup\mathfrak{b}_\mu}} < \aleph_{\beta+\gamma})$ トスレバ $(\exists\gamma')(\beta < \gamma' < \beta+\gamma)$

$(\forall\mu)\ \overline{\overline{\cup\mathfrak{b}_\mu}} \leqq \aleph_{\gamma'}$

コノトキ $\aleph_{\beta+\gamma} = \overline{\overline{M'}} = \overline{\overline{\bigcup_\mu \cup\mathfrak{b}_\mu}} \leqq \sum_\mu \overline{\overline{\cup\mathfrak{b}_\mu}} \leqq \aleph_\beta \cdot \aleph_{\gamma'} = \aleph_{\gamma'} < \aleph_{\beta+\gamma}$ 矛盾

コノトキコノ μ ニ関シテ $\mathfrak{b}_\mu \ni b \to a(b) = a_\mu$ デアル

今 $a_\mu < a_\lambda$ トスレバ $b(a_\lambda) > b$ $\therefore b(a_\lambda) \supset \cup\mathfrak{b}_\mu$

然ルニ $\overline{\overline{b(a_\lambda)}} < \aleph_{\alpha+\delta}$ $\overline{\overline{\cup\mathfrak{b}_\mu}} = \aleph_{\beta+\gamma}$

$\therefore \aleph_{\alpha+\delta} > \aleph_{\beta+\gamma}$ 仮定ヨリ $\alpha+\delta \leqq \beta+\gamma$ コレハ矛盾スル.

IV $(\alpha.\beta) \geqq (\alpha+\delta.\ \beta)$ $\delta > 0$

$\because$) 前節ニヨリ $\alpha < \beta$ ト仮定スレバ $\aleph_\beta^{\aleph_\alpha} = \aleph_\beta$ トスル. コノトキ前節ト同様ニ

$(\alpha,\beta) \ni \mathfrak{a} = \{a \mid \overline{\overline{a}} < \aleph_\alpha \quad a \subset M.\ \overline{\overline{M}} = \aleph_\beta\}$

$(\alpha+\delta,\beta) \ni \mathfrak{b} = \{b \mid \overline{\overline{b}} < \aleph_{\alpha+\delta},\ b \subset M\ \overline{\overline{M'}} = \aleph_\beta\}$

トスレバ $\overline{\overline{\mathfrak{a}}} = \overline{\overline{\mathfrak{b}}} = \aleph_\mu$

依テ $\mathfrak{a}$ ノ元ト $\mathfrak{b}$ ノ元トノ間ニ 1:1 ノ対応 f ガ存在スル.

即チ $f(a)=b$

今 $a(b)=f^{-1}(b)$

$$b(a_0)=\bigcup\{b \mid b=f(a) \quad a \leqq a_0\}$$

トスル. コノトキ $\overline{\overline{a_0}} < \aleph_\alpha$ 依テ $\overline{\overline{\{a \mid a \leqq a_0\}}} \leqq 2^{\aleph_\mu} = \aleph_{\mu+1} < \aleph_\alpha$

コヽデ $\aleph_\mu = \overline{\overline{a_0}}$ $\mu < \alpha$ トスル.

依テ $\overline{\overline{b(a_0)}} \leqq \aleph_\alpha \cdot \aleph_{\alpha+\delta} \leqq \aleph_{\alpha+\delta}$ 依テ $b(a_0) \in \mathfrak{b}$ トナル.

明ラカニコノトキ.

$$a_0 > a(b) \rightarrow b(a_0) > f(a(b)) = b$$

V. $(\alpha.\beta) \nless (\alpha+\delta, \gamma)$ $\delta > 0$ $\beta \leqq \gamma$

∵) 若シ $(\alpha.\beta) < (\alpha+\delta\ \gamma)$ トスル.

$(\alpha.\beta) \ni \mathfrak{a} = \{a \mid \overline{\overline{a}} < \aleph_\alpha \quad a \in M \quad \overline{\overline{M}} = \aleph_\beta\}$

$(\alpha+\delta, \gamma) \ni \mathfrak{b} = \{b \mid \overline{\overline{b}} < \aleph_{\alpha+\delta} \ b \in M' \ \overline{\overline{M'}} = \aleph_\gamma\}$

トスル. $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ デアルカラ.

$$(\exists a(b)\ b(a))\ (b > b(a) \rightarrow a(b) > a)$$

今 $\mathfrak{a}$ ハ *maximal simple sequence*

$$\mathfrak{a}' = \{a_1 a_2 \cdots a_\mu \cdots \mid \mu < \omega_\alpha\} \text{ ヲ含ム}$$

ナゼナラバ $\overline{\overline{a_\mu}} < \aleph_\alpha$ デアルカラ有シ $\mu \geqq \omega_\alpha$ ナラバ $\overline{\overline{a_\mu}} \geqq \aleph_\alpha$ トナルカラ

今 $b_0 = \bigcup\{b(a_\mu) \mid a_\mu \in \mathfrak{a}'\}$ トスル.

$\overline{\overline{b_0}} \leqq \aleph_2 + \delta$ $\therefore b_0 \in \mathfrak{b}$

ナゼナラバ.

$$\overline{\overline{b_0}} \leqq \bigcup_\mu \overline{\overline{b(a_\mu)}} \leqq \aleph_\alpha \cdot \aleph_{\alpha+\delta} = \aleph_{\alpha+\delta}$$

然シ b_0 ニ対応スル $a(b_0)$ ハ存在シナイ.

ナゼナラバ

$a(b_0) = a_0$ トスレバ $a_0 > a_\mu$ $(\forall \mu)$ 依テ $a_0 \in \mathfrak{a}'$

$\therefore (\exists \mu_0)(a_0 = a_{\mu_0}$ $\mu_0 < \mu$ トスレバ $a_0 = a_{\mu_0} < a_\mu)$ コレハ矛盾

VI. 以上ニヨリ 若シ $\alpha < \beta$ ナラバ.

$$\aleph_\beta^{\aleph_\alpha} = \aleph_\beta$$

ノ成立スル $(\alpha\beta)$ ニ関シテハ §27ノ表ハ証明サレル。

即チ $\beta < \omega_0$ ナルトキハ右ノ連結体ノ仮定ヲトレバヨイ。

(*) ハ $\beta < \omega_0$ ナルトキ連結体ノ仮説ト equivalent デアル。

ナゼナラバ M. tein ノ定理ニヨリ

β ガ有限ナラバ $\aleph_\beta^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}\ \aleph_\beta$

依テ若シ $(\exists\gamma)\ (2^{\aleph_{\sigma-1}} > \aleph_\alpha\ \ \aleph_\beta)$ トスレバ

上ノ定理ヨリ

$\aleph_\beta = \aleph_\beta^{\aleph_{\beta-1}} = 2^{\aleph_{\beta-1}} \cdot \aleph_\beta = 2^{\aleph_{\beta-1}}$

之ハ上ノ仮定ニ反スル。(#関サノニヨル)

依テ、更ニ β ガ limes zahl デナケレバ(又ハ limes zahl ヲ除ケバ)

§2.7ノ表ハ撰択公理及ビ連結体ノ仮定ヲ用ヒレバ説明サレタコトニナル。

VII 次ニ $(m\ \ n+1)$

$(m, n) \wedge (m+1, n+1)$

デアルガ、$(m\ .n+1)$ ト (m, n) 及ビ $(m+1, n+1)$ トノ間ニ位スル type ガ

存在スルコトヲ云フ。(勿論 VI デ云ッタ仮定ヲ用ヒテ)

例ヘバ

$\mathfrak{a} = \{a \mid \overline{\overline{a}} \leq \aleph_{m-1} \quad a \in M\ \ \overline{\overline{M}} = \aleph_n\}$

$\mathfrak{b} = \{b \mid \overline{\overline{b}} \leq \aleph_m \quad b \in M'\ \ \overline{\overline{M'}} = \aleph_{n+1}$

$\mathfrak{C} = \{c \mid \overline{\overline{c}} \leq \aleph_{m-1} \quad c \in N\ \ \overline{\overline{N}} = \aleph_{n+1}$

トスル。コノトキ $\mathfrak{a} < \mathfrak{C}\ \ \mathfrak{b} < \mathfrak{C}$ 依テ $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} < \mathfrak{S}$

$\mathfrak{a} \times \mathfrak{b} = \Lambda$ トスレバ $\Lambda \not> \mathfrak{S}$ ガ云ヘル。

若シ $\Lambda \vee \mathfrak{C}$ トスレバ

$(\exists \Lambda(c);\ c(\lambda))\ (\lambda = (ab) > \Lambda\ (c) \rightarrow\ c(\lambda) > c)$

今 $\Lambda_a = \{(a\beta) \mid \beta \in \mathfrak{b}\ \ a$ ハ固定$\}$ トスレバ

$\overline{\overline{\{\Lambda a\}}} = \overline{\overline{\mathfrak{a}}} = \aleph_n$ 且 $\overline{\overline{\mathfrak{C}}} = \aleph_{n+1} = \overline{\overline{N}}$

依テ $(\exists a)\ (\ \overline{\{c \mid \Lambda(c) \in \Lambda_a\ \ \overline{\overline{c}} = 1\}} = \aleph_{n+1})$

シカラザレバ

$$\overline{\overline{W}} = \overline{\bigcup_a \left\{ c \mid \Lambda(c) \in \Lambda a \right\}} = \sum_a \overline{\left\{ c \mid \Lambda(c) \in \Lambda a \right\}} = \aleph_n \cdot \aleph_n = \aleph_n$$

コレハ矛盾.

今カカルaニ関シテ $\Lambda(c) \in \Lambda a$ ナルcヲ番号付ケテ

$$c_1,\ c_2 \cdots\cdots, c_\mu, \cdots\cdots \quad | \mu < \omega_{n+1}$$

トスル. 且 $c_1 \cdots\cdots c_\mu \cdots\cdots c_{\omega_m}$ ヲトレバ

$$\overline{\overline{\left\{ c_\mu \mid \mu \leqq \omega_m \right\}}} = \aleph_m$$

且 $\Lambda(c_\mu) < \lambda$ トスベテノ $\mu \leqq \omega_m$ ニ用ヒテナル Λa ノ元ガ存在スル. ナゼナラバ $\overline{\overline{\Lambda a}} = \delta_{n+1}) \aleph_m$

コノ $c(\lambda)$ ニ関シテ $c(\lambda) \supset c_\mu \quad \mu \leqq \omega_m$

仮テ $c(\lambda) \supset \left\{ c_\mu \mid \mu \leqq \omega_m \right\}$ 故テ $\overline{\overline{c(\lambda)}} \geqq \aleph_m$ コレハ矛盾.

VIII 尚 *directed system* ノ *type* ニ関スル二三ノ簡単ナ結果トシテ次ノモノガアル.

1. (0α) ハ $\aleph_\alpha$ ケノ元ヲ有スル *system* ノ中デ最大ナ *type* デアル.
2. スベテノ *simple sequence* ハ $(\alpha\alpha)$ *type* ニ含マレル.
3. $(0\ 1)$ ハスベテノ α ニ関シテ $\aleph_\alpha$ ケノ元ヲ有スル或ル *system* ヲ含ム.

コレガ束ヲ作ルコトハ何モ云ヘテヰナイ.

(1947. 12. 10)