74. 下半もぢゅS群ニツイテ

(名大) 伊藤 昇

群 $\mathfrak{G}$ ノ部分群ノツケル束ヲ $L(\mathfrak{G})$ トカク。O. Ore ハ $L(\mathfrak{G})$ = Jordan-Dedekind ノ連鎖律ガ成立シ、カツ主鎖指数ガ順序ノ意味デ一ツヅツタガイニヒトシイヤウナ $\mathfrak{G}$ ノコトヲ conformal トヨビ、ソレニツイテ興味アル研究ヲシテヰル。(O. Ore. Contributions to the Theory of Groups of finite Order Duke 5. 1939). トコロガ束論ノ方カライエバ $\mathfrak{G}$ ガ conformal トハ $L(\mathfrak{G})$ ガ下半もぢゅS束デアルト言ウニ等シイ。ソノ意味デ下半もぢゅS性ヲ基礎ニオイテカミノ Ore ノ理論ヲヨリ束論的ニノベテミタイトオモウ。

〔定義〕 $L(\mathfrak{G})$ ガ下半もぢゅS束ナルトキ $\mathfrak{G}$ ヲ下半もぢゅS群トイウ。

〔定理1〕 $\mathfrak{G}$ ヲ下半もぢゅ群 $\mathfrak{L}_{\mathfrak{G}}$ $\mathfrak{K}$ ヲソノ部分群トスル。$\mathfrak{K}$ ガ $\mathfrak{L}_{\mathfrak{G}}$ ノ極大部分群ナラバ $\mathfrak{K}$ ノ $\mathfrak{L}_{\mathfrak{G}}$ ニ対スル指数ハ素数デアル。

〔証明〕 帰納法ニヨル $\mathfrak{M}$ ガ $\mathfrak{G}$ ノ極大部分群ナラバ $\mathfrak{M}$ ノ $\mathfrak{G}$ ニ対スル指数ガ素数

デアルコトヲシメセバヨイ。サテ $\mathfrak{M}$ ガ $\mathfrak{G}$ ノ唯一ノ極大部分群ナルトキハ $\mathfrak{G}$ ハ巡回群デ定理ノ成立ハ明白デアルカライマハカンガヘナイ。ソコデスクナクトモ二ツノアイコトナル極大部分群ガ $\mathfrak{G}$ ニ存在スルガ $\mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{M}_2$ ガ $\mathfrak{G}$ ノ極大部分群ナラバ下半もぢゅS性カラ $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$ ハ $\mathfrak{M}_1$ オヨビ $\mathfrak{M}_2$ ノ極大部分群。シタガッテ帰納法ノ仮定カラソノ指数ハ素数デアル。イマ $\mathfrak{M}_1 : \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 = p_1$, $\mathfrak{M}_2 : \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 = p_2$, $\mathfrak{G} : \mathfrak{M}_1 = n_1$, $\mathfrak{G} : \mathfrak{M}_2 = n_2$ トオケバ $n_1 p_1 = n_2 p_2$。コノ式カラタダチニ $\mathfrak{M}$ ヲ $\mathfrak{G}$ ノ極大部分群、n ヲソノ指数トスレバ、n ノ素因子ノ個数ハ $\mathfrak{M}$ ノイカンニカカハラズ一定デアリ、カツ n_1 n_2 ハ高々一ツノ因子シカコトナラズ。シタガッテ $\mathfrak{G}$ ガ p-群デアルトイウ自明ノ場合ヲノゾケバ $p|n$ ナラ $p\|n$ デアルコトヲシル。サテマタ $\mathfrak{G}$ ノ位数ガアイコトナル高々二ツノ素数デシカワレナイトキハ定理ガ成立スルコトハ明白デアルカラ。$\mathfrak{G}$ ノ位数ハ少クトモ三個ノアイコトナル素因数ヲ有スルトシテヨイ。ソノトキモシ $\mathfrak{G} : \mathfrak{M} = p_i p_j \cdots$ ナラバ p_i ニ対スル Sylow群ノ一ツヲ S_i デシメストキ、S_i ヲフクム極大部分群ノ一ツノ $\mathfrak{M}_i$ ヲトレバ $\mathfrak{G} : \mathfrak{M}_i = q p_j \cdots$, $q \neq p_i$. S_j ヲフクム極大部分群ノ一ツ $\mathfrak{M}_j$ ヲトレバ前二者ト比較スルコトニヨリ $\mathfrak{G} = \mathfrak{M}_j = p_i r \cdots = q s \cdots$, $p_i = q$ 矛盾 以上。

〔定理 2〕 $\mathfrak{G}$ ヲ下半もぢゅS群 $\mathfrak{H}$ ヲソノ任意ノ部分群、p ヲ $\mathfrak{H}$ ノ位数ヲワル任意ノ素数トスル。$\mathfrak{H}$ ハ指数ガ p デアルヨウナ極大部分群ヲフクム。

〔証明〕 マヅ $g = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$. $p_1 > p_2 > \cdots > p_r$ $e_i \geq 1 \ (i = 1, 2, \cdots, r)$ ヲ $\mathfrak{G}$ ノ位数 g ノ素因子分解トシ p_i ニ対スル Sylow群ヲ S_i デシメストキ、$S_1 S_2 \cdots S_i \ (i = 1, 2, \cdots, r)$ ガ $\mathfrak{G}$ ノ正規部分群デアルコトヲ証明スル。帰納法ニヨル S_1 ガ $\mathfrak{G}$ ノ正規部分群デアルコトサエシメセバヨイ。定理1カラ容易ニワカルヨウニ $\mathfrak{G}$ ハ可解群デアルカラアル p_i ニ対シテ指数 p_i ノ正規部分群ヲ有スル。$i \neq 1$ ナラ S_1 ハソノ正規、シタガッテ特部分群ダカラ $\mathfrak{G}$ ノ正規部分群トナル。$i = 1$ ナルトキモ $e_1 > 1$ ナラ上ト同ジ論法デ S_1 ノ極大部分群ガ $\mathfrak{G}$ ノ正規部分群ニナリ、シタガッテソノ剰余群ヲカンガエレバ S_1 ガ $\mathfrak{G}$ ノ正規部分群トナル。$e_1 = 1$ ナルトキハ S_2 ガヤハリ上ト同ジ論法デ $\mathfrak{G}$ ノ正規部分群トナルカラ $\mathfrak{G}/S_2$ ヲカンガエレバ $S_1 S_2$ ガ $\mathfrak{G}$ ノ正規部分群トナル。ココデ $\mathfrak{G} \supsetneqq S_1 S_2$ ナラ仮定カラ S_1 ガ $\mathfrak{G}$ ノ正規部分群トナルコトハマエトマッタク全一ノ論法デアルカラ $\mathfrak{G} = S_1 S_2$ ノ場合ヲカンガエ

ル。トコロガコノ場合ニハ定理2ノ成立ハ自明デ $\mathfrak{G}$ ハ指数 P_2 ノ極大部分群ヲ有シカツ P_2 ガ最小素因数デアルカラ。ソレハマタ $\mathfrak{G}$ ノ正規部分群トナル。ソウダトスレバ S_1 ガ $\mathfrak{G}$ ノ正規部分群トナルコトハ既ニ自明デアラウ。ソコデ定理ノ証明ニハイル。イマ注意シタヨウニ $r \leqq 2$ ナラ定理ハアキラカニ眞デアルカラ $r \geqq 3$ トシテヤル。ソノトキモ帰納法ニヨル。$\mathfrak{G}$ ガ指数 P_2 ノ部分群ヲ有スルコトサエ証明スレバヨイ。サテ S_2 ノ $\mathfrak{G}$ ニオケル正規化群ヲ N_2 トスレバ $\mathfrak{G}=N_2(S_1S_2)$。何者 $\mathfrak{G}$ ノ任意ノ元 g ニ對シテ $S_2^g=S_2^t$, $t \in S_1S_2$ シタガッテ $gt^{-1} \in N_2$。ソウダトスレバ N_2 ノ $\mathfrak{G}$ ニ対スル指数ハ1又ハ P_1 ハ　コノトキハ $\mathfrak{G}/S_2$ デカンガエレバヨク。P_1 ノ中ナルトキハ N_2 ヲフクム $\mathfrak{G}$ ノ極大部分群ヲトレバ定理1カラソノ $\mathfrak{G}$ ニ対スル指数ハ P_1 ニ等シイ。以上.

〔定理3〕 $\mathfrak{G}$ ヲ下半もぢゅS群トスレバ $\mathfrak{G}$ ハ主鎖デアルヨウナ主組成列ヲ有スル。ソノ際ニ主鎖指数ハ單調増大デアルトシテヨイ。

〔證明〕 $\mathfrak{G}$ ニ位数 P_1 ノ正規部分群ガ存在スルコトヲシメセバ アトハ帰納法ニヨリ証明サレル。定理2ニオケルゴトク $\mathfrak{G}_n$)S_1. マヅ S_1 ガあーべる群ナラバ定理2カラ $\mathfrak{G}$ ハ指数 P_2 ノ部分群ヲ有シ、ソコデハ位数 P_1 ノ正規部分群ガ存在スルガ、ソレハ同時ニ S_1 ノ正規部.群デモアルカラ $\mathfrak{G}$ ノ正規部分群トナル。S_1 ガあーべる群デナケレバ S_1 ノ中心ヲ $Z_1 \neq 1$ デシメセバ Z_1 ノナカニ $Z_1S_2 \cdots S_r$)P_1 ナルゴトキ位数 P_1 ノ部分群ガ存在スルガ、ソレハマタ同時ニ S_1 ノ正規部分群デアルカラ $\mathfrak{G}$ ノ正規部分群トナル。　　　　　以上。

サテ定理3ノヨウナ性質ヲ有スル群ガ定理1ヲ満足スルコトハ明白デアルカラ下半もぢゅS群ニオケル上記三定理ハ同値デアル。ソコデ定理1ノ逆ヲ証明スレバ下半もぢゅS群ハソノイヅレデモ特徴ヅケラレルコトニナル。

〔定理4〕 $\mathfrak{G}$ ヲアル群 $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{B}$ ヲソノ部分群トスル。$\mathfrak{B}$ ガ $\mathfrak{A}$ ノ極大部分群ナラバ $\mathfrak{B}$ ノ $\mathfrak{A}$ ニ対スル指数ガ素数デアルコトガ任意ノ $\mathfrak{A}$. $\mathfrak{B}$ ニ對シテイヘルナラバ $\mathfrak{G}$ ハ下半もぢゅS群デアル。

〔証明〕 $\mathfrak{G}$ ガ下半もぢゅS群デナケレバ $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$ ガ $\mathfrak{M}_1$ ノ極大部分群デナイヨウナ $\mathfrak{A}$ ノ極大部分群 $\mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{M}_2$ ガ存在スル。ソウダトスレバ仮定カラ $\mathfrak{A}$
$\mathfrak{M}_1 < \mathfrak{M}_1 : \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$.. 矛盾。　以上
コノコトカラタダチニ

〔系〕 $\mathfrak{G}$ ガ上半もぢゅS群ナラバもぢゅS群デアル。

ナホ定理2カラ容易ニ $\mathfrak{G}$ ノ任意ノ部分群ヲ $\mathfrak{H}$ トスルトキ $\mathfrak{H}$ ハソノアラユル可能ナ位数ニ対シテソノ位数ノ部分群ヲ有スルコトガワカル。コノ逆ニ関シテ Ore ハ剰余群ニ対スル仮定ガ必要カドウカハ興味アルコトデアリ、マタモシ必要ナラソノヨウナ例ガ構成セラレルダロウトイッテオルガ、ソレハ必要デナイ。シカシ Ore ガ予想シタヨウナ例モアル。即チ下半もぢゅ群ハツギノ定理ニヨッテモ特徴ヅケラレルワケデアル。

〔定理5〕 $\mathfrak{G}$ ヲアル群、$\mathfrak{H}$ ヲソノ任意ノ部分群トスル。$\mathfrak{H}$ ガソノアラユル可能ナ位数ニ対シテソノ位数ノ部分群ヲ有スルナラバ $\mathfrak{G}$ ハ下半もぢゅ群デアル。

〔証明〕モシ定理ノ仮定ヲ満足シテ、シカモ下半もぢゅS群デナイヨウナ群ガ存在スルナラバ、ソノヨウナ群ノナカデ極小位数ノモノガ存在スルハヅデアル。ソレヲ $\mathfrak{G}$ トスル。コノ場合ニモ $S_1S_2\cdots S_i \subsetneq \mathfrak{G}$ ($i=1,2,\ldots,n$) トナルコトハ明白デアル。サラニ $\mathfrak{G}$ ニ位数 P_1 ノ正規部分群 $\mathfrak{P}_1$ ガ存在スルコトモ容易ニワカル。ワレワレハ $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}_1$ ニ定理5ノ仮定ガ成立スルコトヲシメシテ矛盾ヲダス。ソレニハ定理2ノ結果ガ成立スルコトヲイエバヨイ。$\mathfrak{P}_1$ ヲフクマナイ $\mathfrak{G}$ ノ極大部分群 $\mathfrak{M}$ ガ存在スレバ $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}_1 \cong \mathfrak{M}$ デ後者ガ下半もぢゅS群デアルカラヨイ。イカナル極大部分群モ $\mathfrak{P}_1$ ヲ含ムナラバトクニ指数ガ P_i ナル極大部分群モ $\mathfrak{P}_i$ ヲフクム。ソウダトスレバ $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}_1$ モ指数 P_i ノ極大部分群ヲ有スルコトニナル。 以上

〔例〕 四元数群 $\mathfrak{Q}$ ノ同型群ハ $\mathfrak{A}_4$ ニ同型デアルカラ $\mathfrak{Q}$ ハ位数3ノ同型対応 σ ヲ有スル。$\mathfrak{Q}$ ノ上ノ $\{\sigma\}$ ノ holomorph ヲ G トスル。G ノ真部分群ガスベテ下半もぢゅS群デアルコトハ容易ニ験証サレル。シカシ $G/\{-1\} \cong \mathfrak{A}_4$ ダカラ G ノ真剰余群ニハ下半もぢゅS群デナイモノガ存在スル。

1947. 11. 20