68 Group ノ central extension ニ就テ

1947.9.9 （阪大） 永尾 汎

$\mathfrak{G}$ ガ normal-subgroup $\mathfrak{N}$ ヲ含ミ，且 $\mathfrak{G}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{F}$ ナルトキ $\mathfrak{G}$ ハ $\mathfrak{N}$ ノ $\mathfrak{F}$ ニ由ル extension デアルトイヒマス．先ヅ $\mathfrak{N}$ ト $\mathfrak{F}$ ヲ与ヘテ $\mathfrak{N}$ ノ $\mathfrak{F}$ ニ由ル extension ヲスベテ求メル事ガ所謂 group ノ extension ノ問題デ コノ問題ニ関シテハ最初 O. Schreier ガ條件ヲ出シ 後正田先生ガ別ノ立場カラコノ條件ヲ出サレマシタ。コヽデハ $\mathfrak{N}$ モ $\mathfrak{F}$ モ共ニ有限 Abel 群トシ，$\mathfrak{N}$ ヲ center ニ含ム様ナ $\mathfrak{N}$ ノ $\mathfrak{F}$ ニ由ル extension ヲ "central extension" ト呼ブコトニシテ先ヅ正田先生ノ條件ニ由リスベテノ central extension ヲ求メマス（§1）ソシテ更ニソノ central extension ノ commutator subgroup 及 center ヲ決定シ（§3）又 extension ノ type ヲ定義シテソノ作ル群ヲ決定シタイト思ヒマス。（§4）．最後ニ種々御指導ヲ受ケマシタ正田先生ニ対シ感謝イタシマス。

§1. Fundamental theorem

先ヅ正田先生ノ定理及 Zassenhaus ノ Lehrbuch der Gruppentheorie ニアル定理ヲ証明ナシニアゲマス。

[正田ノ theorem]

$\mathfrak{F}$ ガ generator ノ set $B=\{b_i\}$ ト defining relation ノ set $R=\{r\}$ ニ由リ与ヘラレテヰルトスル。

今ノ任意ノ group $\mathfrak{N}$ ニ対シ，B カラ生成サレル free group $f(B)$ カラ $\mathfrak{N}$ ノ automorphism 全体ノ作ル group $A\mathfrak{N}$ ノ中ヘノ homomorph ナ mapping $b_i \to \beta_i$ ト R カラ生成サレル $f(B)$ ノ normal subgroup $\mathfrak{R}$ カラ $\mathfrak{N}$ ノ中ヘノ mapping $r \to A_r$ ガ次ノ條件ヲ満足スルトキ $\mathfrak{N}$ ノ $\mathfrak{F}$ ニ由ル extension ガ得ラレル。

i) $A_{r_1 r_2} = A_{r_1} A_{r_2}$

ii) $A_{b_i r b_i^{-1}} = A_r^{\beta_i}$

iii) $A^{r(S)} = A_S A A_S^{-1}$

(コヽデAハ$\mathfrak{N}$ ノ任意ノ元. 又$\Gamma(\beta)$ ハ f ノ元$\Upsilon(b)$ニ対応スル$A_{\mathfrak{N}}$ノ元)
且 コノトキ extension $\mathfrak{G}$ ハ$\mathfrak{N}$ ト$f(B)$ ノ自由積$= b_i A b_i^{-1}, A^{-\beta_i}$
$\Gamma(b) \cdot A_\Upsilon^{-1}$ ナル relotionヲ入レル事ニ由リ得ラレル。逆ニカクシテ スベテノ
$\mathfrak{N}$ ノ $\mathfrak{L}$ ニ由ル extensionガ得ラレル。

[Lemmal 1] (Zassénhuus : Lehrbuch der Gruppen-theorieヨリ)

$\mathfrak{L} = (b_1) \times (b_2) \times \cdots\cdots \times (b_n)$, b_i ノ order$= t_i$ ナル Abelian group $\mathfrak{L}$ ニ対シ $b_i \to \beta_i \in A_{\mathfrak{N}}$ ナル mappingト $\mathfrak{N}$ ノ元 $A_i, A_{i,k}$ ($i, k = 1, 2, \cdots, n$; $i < k$) ガ次ノ條件ヲ満足スレバ $\mathfrak{N}$ ノ $\mathfrak{L}$ ニ由ル extensionガ得ラレル。

(1) $t_i = 0$ ナラバ $A_i = 1$

(2) $A^{\beta_i t_i} = A^{A_i}$ $\quad A_i^{\beta_i} = A_i$

(3) $A^{\beta_i \beta_k} = A^{A_{i,k} \beta_k \beta_i}$

(4) $A_{i,k} A_{k,i} = 1$

(5) $A_k^{\beta_i} = A_{i,k}$ $\quad A_{\beta_i}^k$ ($t_k > 0$ 且 $i < k$ ナルトキ)

(6) $A_{i,k}^{\beta_l} A_{k,l}^{-1} A_{l,i}^{\beta_k} A_{i,k}^{-1} A_{k,l}^{\beta_i} A_{l,i}^{-1} = 1$ $\quad (i < k < l)$

且コノトキ extension $\mathfrak{G}$ ハ $\mathfrak{N}$ ト$f(B)$ ノ自由積$= b_i A b_i^{-1} A^{-\beta_i}$, $b_i b_k b_i^{-1} b_k^{-1} A_{i,k}^{-1}$, $b_i^{t_i} A_i^{-1}$ ナル relationヲ入レル事ニ由リ得ラレル。逆ニカクシテスベテノ $\mathfrak{N}$ ノ $\mathfrak{L}$ ニ由ル extensionガ得ラレル。

特ニ$\mathfrak{N}$ガ Abelian group デ$\mathfrak{N}$ヲ center ノ中ニ含ム様ナトキハ正田先生ノ theorem ニ於テ β_i ハスベテ identical ナ auto-morohism ニナラナケレバナラヌ。從ッテ f ト $\mathfrak{R}$ ノ commutator subgroup ヲ $f_0\mathfrak{R}$デ表ハセバ $\mathfrak{R}/f_0\mathfrak{R}$ カラ$\mathfrak{N}$ノ中ヘノ homomorph ナ mappingニ由リ$\mathfrak{N}$ノ$\mathfrak{L}$ニ由ル extension ハスベテ得ラレル。

今$\mathfrak{L}$ ヲ有限 Abel群トスル。

即チ $\mathfrak{L} = (b_1) \times \cdots\cdots \times (b_n)$
b_i ノ order$= t_i$ トスル。

$\mathfrak{L}$ ノ generator ノ set トシテ $B=\{b_1,\cdots\cdots,b_n\}$ ヲトレバ.
defining relation ハ $r_i=b_i^{t_i}$, $r_{i,k}=b_i b_k b_i^{-1} b_k^{-1}$ デアル.
$f(B)$ デ $\{r_i, r_{i,k}\}$ カラ生成サレル normal subgroup ヲ $\mathfrak{R}$ トスレバ次ノ Lemma ガ成立スル.

[Lemma 1.2]

$\mathfrak{R}/f\mathfrak{o}\mathfrak{R} \simeq \mathfrak{M}\mathfrak{O}=(\mathfrak{W}_1)\times\cdots\cdots\times(\mathfrak{W}_n)\times(\mathfrak{W}_{1,2})\times\cdots\cdots\times(\mathfrak{W}_{i,k})\times\cdots\cdots\times(\mathfrak{W}_{n-1,n})$

ココデ $i<k$ 且 $\mathfrak{W}_i$ ノ order $=0$

$\mathfrak{W}_{i,k}$ ノ order $=t_k$ トスル.

[Proof] $\bar{\mathfrak{R}}=\mathfrak{R}/f\mathfrak{o}\mathfrak{R}$ トスレバ $\bar{\mathfrak{R}}$ ハ $\bar{r}_i=r_i\mathfrak{R}'$ $(i=m+1,\cdots,n)$ ト $\bar{r}_{i,k}=r_{i,k}\mathfrak{R}'$ $(i<k)$ カラ生成サレル事ハ明カデアル.

$\mathfrak{R}$ ニ於テハ

$$r_k^{b_i}=b_i r_k b_i^{-1}=(b_i b_k b_i^{-1})^{t_k}=(r_{i,k}b_k)^{t_k}$$
$$=r_{i,k}(b_k r_{i,k} b_k^{-1})(b_k^2 r_{i,k} b_k^{-2})\cdots(b_k^{t_k-1} r_{i,k} b_k^{-(t_k-1)})$$
$$=r_{i,k}^{\,1+b_k+\cdots\cdots+b_k^{t_k-1}}\, r_k$$

故ニ $\bar{\mathfrak{R}}$ ニ於テハ $\bar{r}_k=\bar{r}_{i,k}^{\,t_k}\,\bar{r}_k$ 即チ $\bar{r}_{i,k}^{\,t_k}=1$ ヲ得ル.

故ニ $\mathfrak{W}_i\to\bar{r}_i$, $\mathfrak{W}_{i,k}\to\bar{r}_{i,k}$ ナル mapping ハ $\mathfrak{M}\mathfrak{O}$ ノ $\bar{\mathfrak{R}}$ ノ上ヘノ homomorph ナ mapping ヲ与ヘル.

逆ニ Lemma 1 ニ於テスベテノ β_i ヲ identical automorphism トシ 且 $A_i=\mathfrak{W}_i$ $(m<i)$ $A_{i,k}=\mathfrak{W}_{i,k}$ トスレバ $\mathfrak{M}\mathfrak{O}$ ノ $\mathfrak{L}$ ニ由ル extension ガ得ラレル事ガ分ル.

且コノ extension $\mathfrak{O}\mathfrak{f}$ ハ $\mathfrak{M}\mathfrak{O}$ ト $f(B)$ ノ自由積ニ $b_i\mathfrak{W}b_i^{-1}\mathfrak{W}^{-1}$, $b_i b_k b_i^{-1} b_k^{-1}\mathfrak{W}_{i,k}^{-1}$, $b_i^{t_i}\mathfrak{W}_i^{-1}$ ナル relation ヲ入レタモノデアル. 故ニ $\bar{r}_i\to\mathfrak{W}_i$, $\bar{r}_{i,k}\to\mathfrak{W}_{i,k}$ ナル mapping ハ $\bar{\mathfrak{R}}$ カラ $\mathfrak{M}\mathfrak{O}$ ノ上ヘノ homomorph ナ mapping ヲ与ヘル.

ヨッテコノ定理ヲ得ル. q.e.d.

[Fundamental theorem]

$\mathfrak{M}$ カラ $\mathfrak{N}$ ノ中ヘノ homomorph ナ mapping ハ $\mathfrak{N}$ ヲ center ノ中ニ含ム様ナ $\mathfrak{N}$ ノ $\mathfrak{B}$ ニ由ル extension ヲ与ヘル。且コノトキ $\overline{\mathfrak{M}}_i \to A_i$ $\overline{\mathfrak{M}}_R \to A_R$ ナル mapping ニ由リ決定サレル extension $\mathfrak{G}$ ハ $\mathfrak{N}$ ト $f(R)$ ノ直積ニ $b_i^{\alpha_i} A_i^{-1}$, $b_i b_R b_i^{-1} - A_i^{-R}$ ナル relation ヲ入レタモノデアル。逆ニ任意ノ $\mathfrak{N}$ ノ $\mathfrak{B}$ ニ由ル central extension ハ上ノ様ニシテ得ラレル。

[Proof] 正田先生ノ定理及 Lemma 2 ニ由リ明カデアル。

[記号]

$\{A_i, A_{i,R}\}$ デ $A_{i,R}^{\alpha}=E$ ナル條件ヲミタス $\mathfrak{N}$ ノ元ノ集合ヲ factor set トイフ。又 factor set ノスベテノ集合ヲ $F(\mathfrak{N}, \mathfrak{B})$ デ表ハス。更ニ factor set $\{A_i, A_{iR}\}$ ニ由リ決定サレル $\mathfrak{N}$ ノ $\mathfrak{B}$ ニ由ル central extension ヲ $\mathcal{E}\{\mathfrak{N}, \mathfrak{B}; A_i, A_{iR}\}$ デ表ハスコトニスル。

§2 Quotient groups and subgroups of an Abelian group

$\mathfrak{A}=(a_1)\times(a_2)\times\cdots\times(a_r)$ ヲ invariant ガ $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r)$ デアル様ナ Abelian group トスル。

$$b_i=\prod_{j=1}^{r} a_j^{\beta_{ij}} \quad (i=1, \cdots, n)$$

ナル n 個ノ元カラ生成サレル $\mathfrak{A}$ ノ subgroup ヲ $\mathfrak{B}$ トスル。コノ paragraph ニ於テハ $\mathfrak{B}$ 及 $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ ノ invarient ヲ決定スル。

[Theorem 2.1]
$$B=\begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1r} \\ \beta_{n1} & \cdots & \beta_{nr} \end{pmatrix}, \quad N=\begin{pmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_r \end{pmatrix}$$

トスレバ $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ ノ invariant ハ $B^*=\begin{pmatrix} B \\ N \end{pmatrix}$ ノ elementental divisor ニ等シイ。

[Proof] B^* ハ明ニ $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ ノ生成元 $\{\overline{a}_1, \cdots \overline{a}_r\}$ ニ對スル matrix of relations ナル事ヨリ明カデアル。

[Lemma 2.2] integral coefficient ヲモツ matrix Q ニ對シ unimodular ナ matrix U ヲ左カラ掛ケテ UQ ノ各列ノ0デナイ coefficient ガ高々一ツシカナイ様ニスルコトガ出来ル。

[Proof] $Q=\begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_r \end{pmatrix}$ (コヽデ q_i ハ Q ノ i-行ヘクトル) トスルトキ。
unimodular ナ matrix ヲ左カラ掛ケル事ニ由リ i 行ト k 行ヲトリカヘル事及ビ i 行ヲ $q_i+\lambda q_k$ (λ ハ任意ノ integer) ニオキカヘル事ガ出来ル，コノ二ツノ変形ヲ有限回繰り返ス事ニ由リ Q ヲ求メル形ニ変形出来ル。

[Theorem 2.3] $B'=UB=(\beta'_{ij})$ ヲ Lemma 2.2 ノ條件ヲ充タス matrix トシ，i-行デ 0 デナイ coefficient ガ $\beta_{i,k_{i,\nu}}$ $(\nu=1, \cdots, \lambda_i)$ デアルトスル。今 B' ノ i-行ノ coefficient デ 0 デナイモノガ存在スルトキ $\dfrac{\delta_{k_{i,\nu}}}{\beta'_{i,k_{i,\nu}}}$ ノ least common multiple ヲ l_i トシ，スベテ 0 ナル時ハ $l_i=1$ トスレバ
$\mathfrak{B}$ ノ invariant ハ $\begin{pmatrix} l_1 l_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & l_n \end{pmatrix}$ ノ elementental divisor ト一致スル。

(Proof) $b'_i=\prod_{\nu=1}^{r} a_\nu^{\beta'_{i\nu}}$ トスレバ仮定ニ由リ明ニ

$$\mathfrak{B}=(b'_1)\times(b'_2)\times\cdots\cdots\times(b'_n)$$

且コヽデ b'_i ノ order ハ l_i ニ等シイ。ヨッテ Theorem ヲ得ル。

§3 Commutator group and center of an extension

$\mathfrak{B}=(b_1)\times\cdots\times(b_n)$，invariant ヲ $(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ トシ
$\mathfrak{N}=(N_1)\times\cdots\times(N_m)$ ヲ invariant ガ $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ デアル様ナ Abel 群デアルトシ，$\mathfrak{G}=\mathcal{E}(\mathfrak{N}, \mathfrak{B}; A_i, A_{i,R})$ ノ commutator group 及ビ center ニツイテ考ヘル。

$$A_{i,k} = N_1^{\alpha^{(1)}_{i,k}} N_2^{\alpha^{(2)}_{i,k}} \cdots N_m^{\alpha^{(m)}_{i,k}}$$ トスル。$i = k$ デアル。

$k < i$ ナルトキ $\alpha^{(\nu)}_{i,k} = -\alpha^{(\nu)}_{k,i}$ 、$i = k$ ナルトキ $\alpha^{(\nu)}_{i,i} = 0$ トシテ

$$A_\nu = \begin{pmatrix} \alpha^{(\nu)}_{11} & \alpha^{(\nu)}_{12} & \cdots & \alpha^{(\nu)}_{1,n} \\ \alpha^{(\nu)}_{21} & \alpha^{(\nu)}_{22} & \cdots & \alpha^{(\nu)}_{2,n} \\ \vdots & & & \\ \alpha^{(\nu)}_{n1} & \alpha^{(\nu)}_{n2} & \cdots & \alpha^{(\nu)}_{nn} \end{pmatrix}$$ トスル。

更ニ $\mathfrak{S}_i = s_i \mathbb{E}_n = \begin{pmatrix} s_i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_i \end{pmatrix} \Big] n$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \mathfrak{S}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ A_2 & 0 & \mathfrak{S}_2 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ A_m & 0 & \cdots & 0 & \mathfrak{S}_m \end{pmatrix}$$ トスル。

[Theorem 3.1] $\mathfrak{G}$ ノ commutator group $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ ハ $\{A_{i\,k}\}$ カラ生成サレル $\mathfrak{N}$ ノ subgroup デアル。ソシテ $\mathfrak{N}/\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ 及 $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ ノ invariant ハ直ニ [Theorem 2.1] 及 [Theorem 2.3] ニ由リ得ラレル。

[Proof] $\mathfrak{G}$ ハ $\mathfrak{N}$ ノ元ト $\mathfrak{S}$ ノ生成元 B トデ生成サレ且 $\mathfrak{N}$ ハ $\mathfrak{G}$ ノ center ニ含マレル故 $\mathfrak{K}(\mathfrak{G})$ ハ B ノ元ノ commutator $\{A_{i,k}\}$ カラ生成サレル $\mathfrak{N}$ ノ部分群デアル。

[Theorem 3.2]

$\mathfrak{G}/\mathfrak{N} \cong \mathfrak{S}$ ナル対応デ b_i ニ対応スル coset ノ代表元ヲ S_{b_i} デ表ハス事ニスル。$(x_1, \ldots, x_n, y, \ldots, y_{i,k}, \ldots y_{nn})$ ニ関スル聯立方程式

(3.1) $\alpha^{(\nu)}_{i,1} x_1 + \alpha^{(\nu)}_{i,2} x_2 + \cdots + \alpha^{(\nu)}_{i,n} x_n + s_\nu y_{i\nu} = 0$

$\nu = 1, \ldots, m \quad ; \quad i = 1, \ldots, n$

ノ解ヲ $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{11}, \ , \lambda_{ik}, \ldots, \lambda_{nn})$ トスレバ、$Z = \prod_{i=1}^{n} S_{b_i}^{\lambda_i}$

従ッテ $Z\mathfrak{N}$ ハ $\mathfrak{G}$ ノ center $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ ニ含マレル。

逆ニ $Z = \prod_{i=1}^{n} S_{b_i}^{\lambda_i}$ ガ $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ ニ含マレレバ $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ハ (3.1) ノ或解ノ部分ニナッテ居ル。

[Proof] $\mathfrak{K}(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{N} \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ ナル故 $\mathfrak{G}$ ノ任意ノ三元 S, S', S'' ニ対シ

$(S, S'S'') = (S, S') \cdot (S, S'')$ デアル。

(コヽデ $(S,S')=SS'S^{-1}S'^{-1}$ トル。)

又 $\mathfrak{N}\subset\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ ナル故、$\mathfrak{G}$ ノ元 S ガ center ニ属スルタメノ条

全條件ハ、任意ノ i ニ対シ $(Sb_i,S)=E$ ナル事デアル。

故ニ $S=\prod_{k=1}^{n}Sb_k^{\lambda_k}\in\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ ナルタメノ完全條件ハ 任意ノ i ニ

対シ、

$$(Sb_i,S)=\prod_{k=1}^{n}(Sb_i,Sb_k)^{\lambda_k}=\prod_{k=1}^{n}A_{i,k}^{\lambda_k}=\prod_{\nu,k}N_\nu^{\lambda_k d_{i,k}^{(\nu)}}=E$$

即チ $(\lambda_1,\cdots\cdots,\lambda_m)$ ガ

$$(3,2)\begin{cases}x_1 d_{i,1}^{(1)}+\cdots\cdots+x_n d_{i,n}^{(1)}\equiv 0 & (\mathrm{mod.}\ s_1)\\ x_1 d_{i,1}^{(2)}+\cdots\cdots+x_n d_{i,n}^{(2)}\equiv 0 & (\mathrm{mod.}\ s_2)\\ \vdots & \\ x_1 d_{i,1}^{(m)}+\cdots\cdots+x_n d_{i,n}^{(m)}\equiv 0 & (\mathrm{mod.}\ s_m)\end{cases}$$

ノ solution デアル事デアル。故ニ $(\lambda_1\cdots\cdots\lambda_n)$ ガ (3.1) ノ

solution ノ一部分ニナル事デアル。

[lemma 3,3] $\mathbb{P}A\mathbb{Q}$ ガ diagonal form ニナル様ナ unimodular ナ matrix $\mathbb{P},\mathbb{Q}$ ガ存在シ且 $\mathbb{Q}=(q_1,\cdots,q_{(m+1)n})$

$$\mathbb{P}A\mathbb{Q}=\begin{pmatrix}d_1 & & & 0\\ & \ddots & d_{r_0} & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & 0\end{pmatrix}$$

トスレバ (3.1) ノ solution ハ $(m+1)n-r$ 個ノ vector $q_{r+1},\cdots,q_{(m+1)n}$ ノ linear combination デ表ハセ、又ソノ逆モ成立スル。

[Proof] $\mathbb{P}A\mathbb{Q}$ ガ diagonal form ニナル様ナ $\mathbb{P},\mathbb{Q}$ ガ存在スル事ハ

明デアル。

今 $\quad\mathfrak{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\\ y_{11}\\ \vdots\\ y_{mn}\end{pmatrix}$ トスレバ

$$A\mathfrak{x}=0\ \rightleftarrows\ \mathbb{P}A\mathbb{Q}\cdot\mathbb{Q}^{-1}\mathfrak{x}=0\ \rightleftarrows\ \mathbb{Q}^{-1}\mathfrak{x}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \lambda_{r+1}\\ \vdots\\ \lambda_{(m+1)n}\end{pmatrix}$$

今 e ヲ i 番目ガ 1 デ他ハスベテ 0 ナル $(m+1)n$ 次元ノ vector トスレバ

$$\mathfrak{x}=\lambda_{r+1}\mathbb{Q}e_{r+1}+\cdots\cdots+\lambda_{(m+1)n}\mathbb{Q}e_{(m+1)n}$$

$$=\lambda_{r+1}q_{r+1}+\cdots\cdots+\lambda_{(m+1)n}q_{(m+1)n}$$

故ニ Lemma ガ成立スル。

[Therem 3.2] ト [Theorem 3.3] ニ由リ直チニ次ノ定理ヲ得ル。

[Theorem 3.4]

[Lemma 3.3] ニ於ケル g_i ヲ $\begin{pmatrix} g_{1i} \\ \vdots \\ g_{ni} \\ \vdots \end{pmatrix}$ トスレバ、

$\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$ ハ $\prod_{k=1}^{n} S_{b_k}^{g_{ki}}$ $i = r+1, \cdots, (m+1)n$ ト $\mathfrak{N}$ ノ元カラ生成サレル。

従ツテ $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{Z}(\mathfrak{G})/\mathfrak{N}$ ノ invariant ハ夫々 [Theorem 2.1] 及 [Theorem 2.3] ニ由リ得ラレル。

§4. Group of extensions

前ト同様ニ $\mathfrak{L} = (b_1) \times \cdots \times (b_n)$, invariant ヲ $(t_1 \cdots\cdots t_n)$ トシ $\mathfrak{N} = (N_1) \times \cdots \times (N_m)$ ヲ invariant ガ $(s_1, \cdots, s_m)$ デアル様ナ Abel 群トスル。

[Definition] $\mathfrak{G} = \mathcal{E}(\mathfrak{N}, \mathfrak{L}; A_i, A_{i,k})$ ト $\mathfrak{G}' = \mathcal{E}(\mathfrak{N}, \mathfrak{L}; B_i, B_{i,k})$ ガ $\mathfrak{N}$ ノ元ハソレ自身ガ対応シ、又 $\mathfrak{L}$ ノ元 b ニ対応スル $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ノ class ニハヤハリ b ニ対応スル $\mathfrak{G}'/\mathfrak{N}$ ノ class ガ対応スル様ナ同型対応ガ存在スルトキ $\mathfrak{G}$ ト $\mathfrak{G}'$ ハ同ジ type ノ extension デアルト定義スル。

[Theorem 4.1]

$\mathfrak{G} = \mathcal{E}(\mathfrak{N}, \mathfrak{L}; A_i, A_{i,k})$ ト $\mathfrak{G}' = \mathcal{E}(\mathfrak{N}, \mathfrak{L}; B_i, B_{i,k})$ ガ同ジ type ノ extension デアルタメノ必要且十分ナ條件ハ各 b_i ニ対応シテ $\mathfrak{N}$ ノ元 N_{b_i} ガ存在シテ

i) $B_i = A_i N_{b_i}^{t_i}$

ii) $B_{i,k} = A_{i,k}$

ナル條件ヲミタス事デアル。

[Proof]

$\mathfrak{G}$ ト $\mathfrak{G}'$ ガ同ジ type ノ extension デアルトシ、ソノ同型対応ヲ λ トスル。仮定ヨリ $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ノ $\{b_i\}$ $(i = 1, \cdots, n)$ ニ対応スル class ノ代表系 $\{S_i\}$ デ $S_i^{t_i} = A_i$, $S_i S_k S_i^{-1} S_k^{-1} = A_{i,k}$ トナルモノガトレル。

同様ニ $\mathfrak{G}'/\mathfrak{N}$ ノ代表系 $\{T_i\}$ デ

$T_i^{t_i} = B_i,\ T_i T_k T_i^{-1} T_k^{-1} = B_{i,k}$ ナルモノガトレル。

今 $\lambda(T_i) = S_i N_{b_i}$ トスレバ

$$B_i = \lambda(B_i) = \lambda(T_i^{t_i}) = (\lambda(T_i))^{t_i} = (S_i N_{b_i})^{t_i} = A_i N_{b_i}^{t_i}$$

又 $B_{i,k} = \alpha(B_{i,k}) = \lambda(T_i T_k T_i^{-1} T_k^{-1})$

$$= S_i N_{b_i} S_k N_{b_k} (S_i N_{b_i})^{-1} (S_k N_{b_k})^{-1} = S_i S_k S_i^{-1} S_k^{-1} = A_{i,k}$$

故ニ定理ノ條件ガ必要ナル事ガイヘタ。

逆ニ定理ノ條件ガミタサレテ居レバ，$\mathfrak{N}$ ノ元 N ニ対シテハ $\lambda(N) = N$ トシ 又 i ニ対シテハ $\lambda(T_i) = S_i N_{b_i}$ トシテ $\mathfrak{G}'$ カラ $\mathfrak{G}$ ノ上ヘノ対応 λ ヲ定理スレバコレガ同型対応ヲ与ヘ 従ツテ $\mathfrak{G}$ ト $\mathfrak{G}'$ ガ同ジ type ノ extension ナル事ガ分ル。

[Definition] 二ツノ factor set $\{A_i, A_{i,k}\}$ ト $\{B_i, B_{i,k}\}$ ガ [Theorem 4.1] ノ條件ヲミタストキ equivalent デアルトイフ．且コノトキ $\{A_i, A_{i,k}\} \sim \{B_i, B_{i,k}\}$ トカク。

コレガ同値律ヲ充タス事ハ殆ンド明デアル。

[Lemma 4.2]

$\{A_i, A_{i,k}\} \circ \{B_i, B_{i,k}\} = \{A_i B_i,\ A_{i,k} B_{i,k}\}$ ニ由リ二ツノ factor set ノ間ノ積ヲ定義スレバ factor set ノ全体 $F(\mathfrak{N}, \mathfrak{L})$ ハ group ヲ作ル。

且 $F(\mathfrak{N}, \mathfrak{L}) \simeq \mathfrak{N}_1 \times \cdots \times \mathfrak{N}_n \times \mathfrak{N}_{1,2} \times \cdots \times \mathfrak{N}_{i,k} \times \cdots \times \mathfrak{N}_{n-1,n}$

コヽデ $i<k$，$\mathfrak{N} \simeq \mathfrak{N}_i$，$\mathfrak{N}_{i,k} \simeq \mathfrak{N}^{(t_k)} = \{N \mid N \in \mathfrak{N},\ N^{t_k} = E\}$ トスル。

[Proof] $A_{i,k}^{t_k} = E$．$B_{i,k}^{t_k} = E$ ナラバ $(A_{i,k}^{-1})^{t_k} = E$，$(A_{i,k} B_{i,k})^{t_k} = E$ ナル故 $F(\mathfrak{N}, \mathfrak{L})$ ガ group ヲ作ル事ハ明デアル．且 factor set $\{A_i, A_{i,k}\}$ ハ A_i ハ $\mathfrak{N}$ カラ，$A_{i,k}$ ハ $\mathfrak{N}^{(t_k)}$ カラ任意ノ元ヲトル事ニ由リ得ラレル故．後半モ明デアル。

[Definition]

$\{A_i, A_{i,k}\} \sim \{A_i', A_{i,k}'\}$，$\{B_i, B_{i,k}\} \sim \{B_i', B_{i,k}'\}$ ナラバ $\{A_i B_i,$

$A_{i,k}B_{i,k}\} \sim \{A_i'\text{-}B_i', A_{i,k}'B_{i,k}'\}$ナル故 $F(\mathfrak{N}, \mathfrak{L})$ ヲ equivalent ナ class ニ分テレバ. ソレハ又 abelian group ヲ作ル. ソレヲ $\mathfrak{N}$ ノ $\mathfrak{L}$ ニ由ル extention ノ group トイヒ, $\mathcal{E}(\mathfrak{N}, \mathfrak{L})$ デ表ハス。

equivalent ノ定義ヨリ直ニ $\mathcal{E}(\mathfrak{N}, \mathfrak{L})$ ハ決定サレル. 部分

[Theorem 4.3]

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}, \mathfrak{L}) \simeq \mathfrak{N}_1/\mathfrak{N}_1^{t_1} \times \cdots \times \mathfrak{N}_n/\mathfrak{N}_n^{t_n} \times \pi_{12} \times \cdots \times \mathfrak{N}_{n-1,n}$$

[Theorem 4.4]

$\mathcal{E}(\mathfrak{N}, \mathfrak{L})$ ノ order ハ $\prod_{i=1}^{m}\prod_{k=1}^{n}(s_i, t_k)^k$ デアル。

コヽデ (s_i, t_k) ハ s_i ト t_k ノ greatest common divisor デアル。

[Proof.] $\mathfrak{N}^{t_k} = (N_1^{t_k}) \times \cdots \times (N_m^{t_k})$

$\therefore \mathfrak{N}/\mathfrak{N}^{t_k} = (N_1)/(N_1^{t_k}) \times \cdots \times (N_m)/(N_m^{t_k})$

コヽデ $N_i/(N_i^{t_k})$ ノ order ハ (s_i, t_k) 故ニ $\mathfrak{N}/\mathfrak{N}^{t_k}$ ノ order ハ $\prod_{i=1}^{m}(s_i, t_k)$ デアル。

又 $\mathfrak{N}^{(t_k)} = (N_1^{(t_k)}) \times \cdots \times (N_m)^{(t_k)}$ デ $(N_i)^{(t_k)}$ ノ order ハ (s_i, t_k) 故ニ $\mathfrak{N}^{(t_k)}$ ノ order ハ $\prod_{i=1}^{m}(s_i, t_k)$

故ニ上ノ定理ヲ得ル。 q.e.d