66. 非線型微分方程式論に於けるリミットサイクルの實際的決定法に就て (I)

清水辰次郎
卜部小十郎

非線型微分方程式論に於ける *limit cycle* の問題は理論上からも應用上からも極めて重要なことが知られてゐる．然るにその研究は局所的性質の外は Poincaré, Bendixson 以來余り知られてゐない．

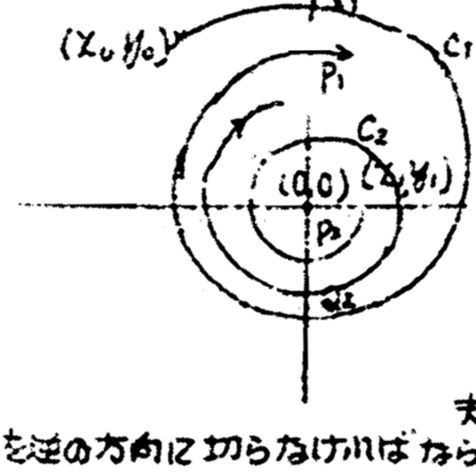
實際に与へられた方程式に於けるリミットサイクルの存否の決定は極めて困難な問題とされてゐる．

此処に器械により非線型方程式の解を近似的に画かしめそれによりリミツトサイクルの存在を判定し得る場合を述べよう．勿論解法機を信用すればリミットサイクルの存在は図上に現はれるものではあるが誤差の影響を少しとするも無限時間追跡することは不可能なる故リミットサイクルの存在を主張するためには多少の考察を必要とする．

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \quad \text{又は} \quad \frac{dy}{dt}=Q(x,y),\ \frac{dx}{dt}=P(x,y)$$

に於て理論上必要ではないが機械の性能上 P, Q は x, y の多項式とし $P(x,y)=0$, $Q(x,y)=0$ の共通根は $(0,0)$ のみとする．

今微分方程式解法器により下図の如き解曲線を画いたとする．



(x_0, y_0), (x_1, y_1) を夫々初期値とする解 C_1, C_2 に対し P_1Q_1 上のすべての点にて $\frac{dx}{dt}>0$, P_2Q_2 上のすべての点にて $\frac{dx}{dt}<0$ が示し得られるならば C_1 と C_2 との間にリミットサイクルの存在が証せられる．何者，C_1 は夫自身と交はらないから ∞ に向ふならば P_1Q_1 を逆の方向に切らなければならない．それは $\frac{dx}{dt}>0$ に矛盾する．又 C_1 が $(0,0)$ に收斂するならば同じく P_2Q_2 を横切らねばならぬから $\frac{dx}{dt}<0$ に矛盾する．

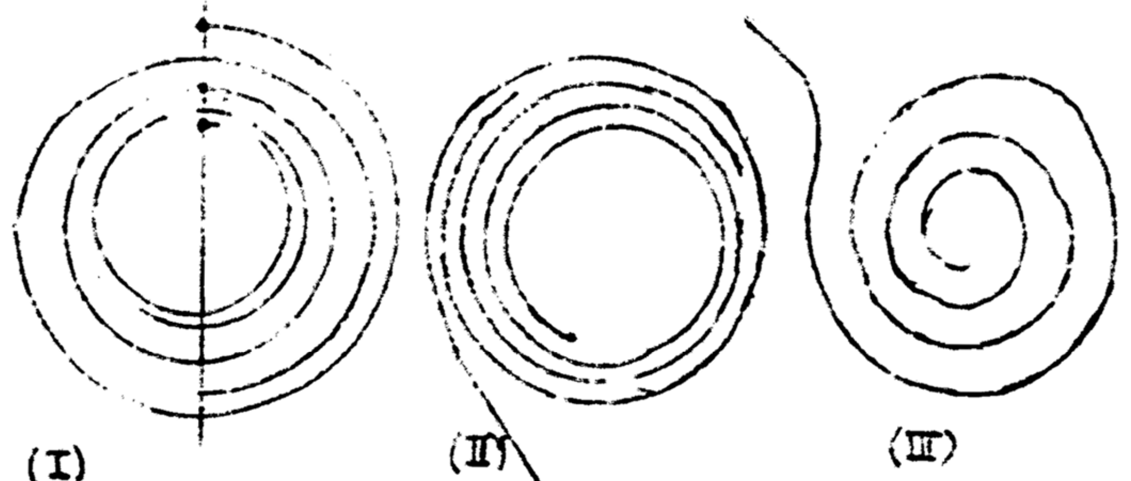
備．*Bush* 型微分方程式解法器により

(I) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x+\mu(1-x^2)y}{y}$ $\quad \mu = 0.1$

(II) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x+\mu(1-x^4)y}{y}$ $\quad \mu = 0.1$

(III) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x+\mu(1-x^3)y}{y}$ $\quad \mu = 0.1$

を解くことにより.



(I)
$y=0$ $x=+3$cm　$y=0$ $x=+2$cm　$y=0$ $x=1.5$cm
(実物縮小ス)

(II)
$y=0$ $x=-3$cm　$y=0$ $x=-1$cm
(実物縮小ス)

(III)
$y=0$
$x=-1$cm
(実物縮小ス)

(I)(II)がリミットサイクルが存在しその形も大体図の如きもの(プリントの都合上原稿より縮少した)なることがわかる. (III)は $|x|<5$ $|y|<5$, $|x|\times$, $|xy|>1$ に於てリミットサイクルのないことは図の示す如くであるが $|x|\geq 5$. $|y|>5$ にては $\dfrac{dy}{dx}$ の同じ値をとる曲線を画けば容易にわかるようにリミットサイクルはあり得ない. 又 $|x|<1$, $|y|<1$ に於ては

$\iint \mu(1-x^3)\,dx\,dy > 0$ なることから同じくリミットサイクルの存在し得ないことがわかる.

以上のことから $\ddot{x}-\mu(1-x^m)\dot{x}+x=0$ (但し $\dot{x}=y$ とおく) の解は m が偶数にて次第に大となるとき $|x|=1$, $|y|=1$ なる位置に近づくリミットサイクルがあり奇数のときにはリミットサイクルはないらしいこともわかる. m が 2 より大なる偶数の場合リミットサイクルの形は知られてゐないが存在することは Van der Pol, Lienard 等によつて証明せられてゐる. 次には今迄に知られてゐない方程式についてリミットサイクルの存否を考へよう.

註 我国に於ては機械による未知の微分方程式の解に関する発表は本稿が最初ではないかと思ふ.

(1947. 9. 8)