60. Reflexive vector lattice の Norm に就て

中野 秀五郎

簡單の爲 Space $\mathfrak{M}$ とは vector lattice で、任意の正要素の集合の $(\lambda\in\Lambda)$ に對して $\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda$ が存在するものとし $\mathfrak{M}_1$ が $\mathfrak{M}$ の subspace であるとは $\mathfrak{M}_1 \ni a$, $|a| \geq |b|$ に對し $b \in \mathfrak{M}_1$ が成立する linear space を意味するものとする。Space $\mathfrak{M}$ に於ける linear functional L が連續であるとは、$\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = a$ に對し $\lim_{\nu\to\infty} L(a_\nu) = L(a)$ が成立することである。又 L が連續で且 $\bigwedge_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda = 0$ に對し常に

$$\inf |L(a_{\lambda_1} \wedge a_{\lambda_2} \wedge \cdots\cdots \wedge a_{\lambda_n}| = 0 \quad (n = 1, 2 \cdots, \lambda_\nu \in \Lambda)$$

なるとき，Lは汎連続であると云ふ。Space $\mathfrak{M}$の汎連續な linear functional の全体が又 space を形成する。此 Space を$\mathfrak{M}$の conjugate space と呼び $\overline{\mathfrak{M}}$にて表はすことゝする。$\overline{\mathfrak{M}}$の conjugate space $\overline{\overline{\mathfrak{M}}}$を考へるときは，$\mathfrak{M}$は$\overline{\overline{\mathfrak{M}}}$の subspace となる。特に$\mathfrak{M}$と$\overline{\overline{\mathfrak{M}}}$と一致するとき $\mathfrak{M}$は reflexive であると云ふ。 任意の space $\mathfrak{M}$ の conjugate space は必らず reflexive となるのである。（中野秀五郎: Stetige linear Funktionale auf dem teilweise geordneten Modul. 東大紀要. 1942. 参照）Reflexive space $\mathfrak{M}$及び其 conjugate $\overline{\mathfrak{M}}$に norm が導入されて

$$\|a\| = \sup_{\|\bar{a}\| \le 1} |\bar{a}(a)|, \quad \|\bar{a}\| = \sup_{\|a\| \le 1} |\bar{a}(a)| \quad (a \in \mathfrak{M},\ \bar{a} \in \overline{\mathfrak{M}})$$

が満足されるとき，$\mathfrak{M}$は reflexive Norm を有すると云ふ。此処で証明する主なることは reflexive space $\mathfrak{M}$ が reflexive norm を有するときは其 norm は同等の任意にと一意的に決定され，然も$\mathfrak{M}$は其 norm に關して complete である。逆に$\mathfrak{M}$が complete な norm を有するときは，$\mathfrak{M}$は reflexive norm を有する。次に space $\mathfrak{M}$ の有限個の subspace $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_n$ が悉く reflexive で且 reflexive norm を有するときは，共通部分 $\mathfrak{M}_1 \cdots\cdots \mathfrak{M}_n$ も亦 reflexive で且 reflexive norm を有する。然し subspace 列 $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \cdots\cdots$ に對しては，$\mathfrak{M}_0 = \prod_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{M}_\nu$ が complete element p ($p \cap x = 0 \to x = 0$) を含めば，$\mathfrak{M}_0$は reflexive ではあるが決して reflexive norm を有さない。勿論此場合 $\mathfrak{M}_0$は$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \cdots\cdots$, の有限個の共通部分とは一致しないとする。例へば区間 $(0, 1)$ で measure zero が一致する有限個の total addive measure $m_1, \cdots\cdots, m_n$ に對し

$$\int_0^1 |\varphi(x)|^{p_\nu} dm_\nu < +\infty \quad (p_\nu \ge 1,\ \nu = 1, 2, \cdots, n)$$

なるが如き measurable function $\varphi(x)$の全体は reflexive space で reflexive norm を有する。然し Lebesgue measure m に對し εを如何なる正数とするも

$$\int_0^1 |\varphi(x)|^{p-\varepsilon} dm < +\infty \quad (p > 1)$$

なるが如き $\varphi(X)$ の全体は, reflexive space ではあるが, reflexive norm を有さない。又 reflexive space で全然 norm を有さない例としては, 総ての数列 $a(a_1, a_2, \cdots\cdots)$ より成る space が挙げられる。此 conjugate space は有限個を除いて零なる数列 $\bar{a}(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \cdots\cdots)$ にして, $\bar{a}(a) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \bar{a}_\nu a_\nu$ である。如何となれば, ν 番目が1で他が0なる数列を e_ν とし, 若しも norm が存在するとすれば $a = \left(\frac{1}{\|e_1\|}, \frac{2}{\|e_2\|}, \cdots\cdots\right)$ に對し, $\|a\| \geqq \left\| \frac{\nu}{\|e_\nu\|} e_\nu \right\| = \nu$ $(\nu = 1, 2, \cdots\cdots)$ となりて矛盾する。此処に norm とは, 1) $0 \leqq \|a\| < +\infty$, $\|a\| = 0 \to a = 0$, 2) $\|\alpha a\| = |\alpha| \|a\|$, 3) $|\alpha| \leqq |\beta|$ ならば $\|\alpha\| \leqq \|\beta\|$ 4) $\|a + b\| \leqq \|a\| + \|b\|$ を満足するものとする。次に定理の形で説明することとする。

<u>定理1</u> Reflexive space $\mathfrak{M}$ 及び其の conjugate $\overline{\mathfrak{M}}$ が共に norm を有し, $\|a\| = \sup_{\|\bar{a}\| \leqq 1} |\bar{a}(a)|$ $(a \in \mathfrak{M})$ なるときは $0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots\cdots$, $\sup \|a_\nu\| < +\infty$, $a_\nu \in \mathfrak{M}$ に対し, $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = a$, $\lim_{\nu\to\infty} \|a_\nu\| = \|a\|$ なる $a \in \mathfrak{M}$ が存在する。

<u>証明</u> $0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots\cdots$, $\sup_\nu \|a_\nu\| \leqq \alpha$ に對しては, $\bar{a}(a_\nu) \leqq \|\bar{a}\| \cdot \|a_\nu\| \leqq \alpha \|\bar{a}\|$ なるを以て $P(\bar{a}) = \lim_{\nu\to\infty} \bar{a}(a_\nu)$ と置くことにより $\overline{\mathfrak{M}}$ に於ける positive linear functional P が得られる。此 P が $\overline{\mathfrak{M}}$ に於て連續なることが容易に証明される。故に $P = a \in \mathfrak{M}$ なる a が存在し, 此如き a に對しては明かに $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = a$ である。然かも任意の正数 ε に對し,

$$\bar{a}(a) > \|a\| - \varepsilon, \quad \|\bar{a}\| = 1 \qquad 0 \leqq \bar{a} \in \overline{\mathfrak{M}}$$

なる $\bar{a}$ が存在すべきを以て, $\lim_{\nu\to\infty} \|a_\nu\| \geqq \lim_{\nu\to\infty} \bar{a}(a_\nu) = \bar{a}(a) > \|a\| - \varepsilon$ が成立する。故に $\lim_{\nu\to\infty} \|a_\nu\| = \|a\|$ である。

<u>定理2</u> Space $\mathfrak{M}$ に norm が定義され, $0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots\cdots$, $\sup_\nu \|a_\nu\| < \infty$ に對し, $a_\nu \leqq a$, $\|a\| = \lim_{\nu\to\infty} \|a_\nu\|$ なる a が存在するときは, $\mathfrak{M}$ は此 norm に關して complete である。

<u>証明</u> Cauchy sequence $a_1, a_2, \cdots\cdots$ に對しては, $\|a_{\mu_\nu} - a_{\mu_{\nu-1}}\| \leqq \frac{1}{2^\nu}$ なる subsequence $a_{\mu_1}, a_{\mu_2}, \cdots$ が存在する。今 $b_\nu = \sum_{\rho=2}^{\nu} |a_{\mu_\rho} - a_{\mu_{\rho-1}}|$ と置くときは, 明かに $0 \leqq b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots$, $\|b_\nu\| \leqq \sum_{\rho=2}^{\infty} \|a_{\mu_\rho} - a_{\mu_{\rho-1}}\|$

$\leqq \frac{1}{2^{p}}$ なるを以て、假定により $\sum_{p=2} \| a_{\mu_p} - a_{\mu_{p-1}} \|$ は收斂する。故に $a = a_{\mu_1} + \sum_{p=2}^{\infty} (a_{\mu_p} - a_{\mu_{p-1}})$ と置くときは、

$$|a - a_{\mu_\nu}| \leqq \sum_{p=1}^{\infty} |a_{\mu_\nu+p} - a_{\mu_\nu+p-1}|, \quad \| \sum_{p=1} |a_{\mu_\nu+p} - a_{\mu_\nu+p-1}| \|$$

$\leqq \frac{1}{2^{\nu-1}}$ なるを以て、又假定により $\| a - a_{\mu_\nu} \| \leqq \frac{1}{2^{\nu-1}}$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$ が成立する。此れより $\lim_{\nu \to \infty} \| a_\nu - a \| = 0$ が得られる。

Kantorovitch は此定理に於て、更に $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots$, $\lim_{\nu \to \infty} a_\nu = 0$ ならば、$\lim_{\nu \to \infty} \| a_\nu \| = 0$ なる假定を入れて証明した。然し此定理は其れより本質的に廣いことは M-space を思へば明かである。

定理 3　Space $\mathfrak{M}$ が前定理に於けるが如き二つの Norm $\| a \|_1$, $\| a \|_2$ を有するときは此二つの norm は同等である。(即ち $\| a \|_1 \leqq \alpha \| a \|_2$, $\| a \|_2 \leqq \beta \| a \|_1$ なる α, β が存在する。)

証明　$\| a_\nu \|_1 = 1$, $\| a_\nu \|_2 \geqq 2^{2\nu}$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$ とすれば、$\| \sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{1}{2^\nu} |a_\nu| \| \leqq 1$ なるべきを以て、假定により $a = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} |a_\nu|$ なる a が存在する。然るときは $\| a \|_2 \geqq \frac{1}{2^\nu} \| a_\nu \|_2 \geqq 2^\nu$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$ となつて矛盾する。

定理 4　Reflexive space $\mathfrak{M}$ に reflexive norm が存在する爲の必要且つ充分なる條件は各 $a \in \mathfrak{M}$ に正數 α_a を對應せしめるときは、任意の $\bar{a} \in \overline{\mathfrak{M}}$ に對し、$\sup_{a \in \mathfrak{M}} |\bar{a}(\alpha_a a)| < +\infty$ なることである。

証明　$\mathfrak{M}$ が reflexive norm を有するときは、$\alpha_a = \frac{1}{\| a \|}$ $(a \neq 0)$ を對應せしめれば、明かに $\sup_a |\bar{a}(\alpha_a a)| \leqq \| \bar{a} \|$ である。逆に定理に述べるが如き α_a が存在するときは

$$\| \bar{a} \|_1 = \sup_a |\bar{a}(\alpha_a a)|, \quad \| a \| = \sup_{\| \bar{a} \|_1 \leqq 1} |\bar{a}(a)|, \quad \| \bar{a} \| = \sup_{\| a \| \leqq 1} |\bar{a}(a)|$$

と置くときは、$\| \bar{a} \| = \sup_{\| a \| \leqq 1} |\bar{a}(a)|$ が証明される。

此定理より次の定理が得られる。

定理 5　Reflexive space $\mathfrak{M}$ が complete な norm を有すれば $\mathfrak{M}$ は reflexive norm を有する。

証明　$\mathfrak{M}$ が complete norm を有すれば任意の positive linear functional P に對し、$|P(a)| \leqq \alpha \| a \|$ なる α が存在する。如何となれば $\| a_\nu \| = 1$, $P(a_\nu) \geqq 2^\nu$, $a_\nu \geqq 0$ とすれば $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} \| a_\nu \| \leqq 1$ なるを以て、假

定により $b_\nu=\sum_{\mu=1}^{\nu}\frac{1}{2^\mu}a_\mu$ と置くときは $\lim_{\nu\to\infty}\|a-b_\nu\|=0$ である. 然るに,

$$\underset{\nu}{\mathrm{l}}\,\|(a\smile b_\mu)-b_\nu\|\leqq \underset{\nu}{\mathrm{l}}\,\|a-b_\nu\| \quad (\nu\geqq\mu)$$

なるべきを以て $a\smile b_\mu=a$, 即ち $a\geqq b_\mu$ $(\mu=1,2,\cdots\cdots)$ である. 故に.

$P(a)\geqq P(b_\nu)\geqq\nu$ $(\nu=1,2,\cdots\cdots)$ となつて矛盾する. $\alpha_a=\frac{1}{\|a\|}$ $(a\neq0)$

と置くときは前定理により $\mathfrak{M}$ が reflexive norm を有することが知られる.

定理 6 Space $\mathfrak{M}$ の subspace $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ が共に reflexive で reflexive norm を有するときは 共通部分 $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ も亦 reflexive norm を有する.

証明 Conjugate $\overline{\mathfrak{M}_1}$, $\overline{\mathfrak{M}_2}$ を含む最小な linear space を $\overline{\mathfrak{M}_3}$ とすれば, 明かに $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ は $\overline{\mathfrak{M}_3}$ の conjugate space なるを以て, $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ は reflexive である. 又 $\mathfrak{M}_1$ の norm $\|a\|_1$ 及び $\mathfrak{M}_2$ の norm $\|a_2\|_2$ に對し.

$$\|a\|=\|a\|_1+\|a\|_2 \qquad (a\in\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2)$$

と置くときは, 此 norm $\|a\|$ が定理2の條件を満足するを以て $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2$ は此 norm に關して complete. 從つて前定理により reflexive norm を有する.

Space $\mathfrak{M}$ の任意の要素列 $a_1, a_2, \cdots\cdots$ に對し正數列 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots$ を適當に定めて $\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu a_\nu$ を收斂せしめ得る時 $\mathfrak{M}$ を係數完備と云ふ.
Space $\mathfrak{M}$ が定理2の條件を有する norm を有するときは. $\mathfrak{M}$ は明かに係數完備である. 從つて定理1により reflexive norm を有するときは $\mathfrak{M}$ は係數完備である.

定理 7 Subspace 列 $\mathfrak{M}_1\supset\mathfrak{M}_2\supset\cdots\cdots$ が悉く係數完備にして, $\mathfrak{M}=\prod_{\nu=1}^{\infty}\mathfrak{M}_\nu$ が $\mathfrak{M}_\nu$ の何れとも異り, 然かも任意の要素 a の projector $[a]$ に對し, $[a]=[p]$, $p\in\mathfrak{M}$ なる p が存在するときは $\mathfrak{M}$ は reflexive ではあるが, 其 conjugate $\overline{\mathfrak{M}}$ は係數完備ではない. 然かも $\overline{\mathfrak{M}}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\overline{\mathfrak{M}_\nu}$ である.

証明. $\overline{\mathfrak{M}_1}<\overline{\mathfrak{M}_2}<\cdots\cdots$, $\overline{\mathfrak{M}}\supset\overline{\mathfrak{M}_\nu}$ $(\nu=1,2,\cdots\cdots)$ なることは明かである。先づ $\overline{\mathfrak{M}}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\overline{\mathfrak{M}_\nu}$ を証明する. 若しも $0\leqq\overline{a_0}\in\overline{\mathfrak{M}}$, $\overline{a_0}\,\overline{\in}\,\overline{\mathfrak{M}_\nu}$ $(\nu=1,2,\cdots)$

なる $\bar{a}_0$ が存在したとする。然るときは、

$$\bar{a}_0(a_\nu)=+\infty \quad 0\leqq a_\nu\in\mathfrak{M}_\nu \quad \text{即ち} \quad \sup_{\mathfrak{M}_\nu\ni x\leqq\bar{a}_0}\bar{a}(a_\nu)=+\infty$$

なる a_ν が存在する。仮定により $\mathfrak{M}_\nu$ は係数完備なるを以て、

$$b_\mu=\sum_{\nu=\mu}^{\infty}\alpha_{\mu,\nu}a_\nu\in\mathfrak{M}_\mu \qquad (\mu=1,2\cdots)$$

なる正数 $\alpha_{\mu,\nu}$ が得られる。然かも $\mathfrak{M}_\mu\supset\mathfrak{M}_{\mu+1}$ より

$$\alpha_{1,\nu}\geqq\alpha_{2,\nu}\geqq\cdots\cdots\geqq\alpha_{\nu,\nu}>0 \qquad (\nu=1,2,\cdots)$$

ならしめ得る。然るときは、明かに $b_1\geqq b_2\geqq\cdots, b_\nu\in\mathfrak{M}_\nu$, $\bar{a}(b_\nu)=+\infty$ である。又 $[b_1]=[p]$, $0\leqq p\in\mathfrak{M}$ なる p に対し、第二スペクトル論により $\mathfrak{M}_1$ の Eigenraum $\mathfrak{E}$ に於て

$$b_\nu=\int_{[p]}\varphi_\nu(\mathfrak{p})\,d_{\mathfrak{p}}p$$

なる正連続函数 $\varphi_\nu(\mathfrak{p})$ が存在する。然かも $\varphi_1(\mathfrak{p})\geqq\varphi_2(\mathfrak{p})\geqq\cdots$ にして、

$$[p_1]\leqq[p_2]\leqq\cdots,\qquad \lim_{\nu\to\infty}[p_\nu]=[p]$$

にして $\varphi_\nu(\mathfrak{p})$ が $[p_\nu]$ に対応する近傍 $\mathfrak{U}_{[p_\nu]}$ にて有界となり、

$$b_\nu=\lim_{\mu\to\infty}\int_{[p_\mu]}\varphi_\nu(\mathfrak{p})\,d_{\mathfrak{p}}p \qquad (\nu=1,2,\cdots)$$

が成立する。

$$\bar{a}(b_\nu)=\lim_{\mu\to\infty}\int_{[p_\mu]}\varphi_\nu(\mathfrak{p})\,\bar{a}(d_{\mathfrak{p}}p)=+\infty$$

なるべきを以て、subsequence $[p_{\mu_1}]\leqq[p_{\mu_2}]\leqq\cdots$ を適当に定めて、

$$\int_{[p_{\mu_\nu}]-[p_{\mu_{\nu-1}}]}\varphi_\nu(\mathfrak{p})\,\bar{a}(d_{\mathfrak{p}}p)\geqq\nu \qquad (\nu=1,2,\cdots)$$

ならしめ得る。然るときは、

$$\varphi(\mathfrak{p})=\varphi_\nu(\mathfrak{p}) \qquad (\mathfrak{p}\in\mathfrak{U}_{[p_{\mu_\nu}]-[p_{\mu_{\nu-1}}]})$$

として連続函数 $\varphi(\mathfrak{p})$ を定めるときは

$$0\leqq\varphi(\mathfrak{p})\leqq\varphi_\nu(\mathfrak{p}) \qquad (\mathfrak{p}\in\mathfrak{U}_{[p]}-\mathfrak{U}_{[p_\nu]})$$

なるべきを以て、

$$p_0=\int_{[p]}\varphi(\mathfrak{p})\,d_{\mathfrak{p}}p\in\mathfrak{M}_\nu \qquad (\nu=1,2,\cdots)$$

である。故に $p_0\in\mathfrak{M}$ にして、然かも

$$\bar{a}(p_0)=\int_{[p]}\varphi(\mathfrak{p})\,\bar{a}(d_{\mathfrak{p}}p)\geqq\int_{[p_{\mu_\nu}]}\varphi_\nu(\mathfrak{p})\,\bar{a}(d_{\mathfrak{p}}p)\geqq\nu \qquad (\nu=1,2,\cdots)$$

となり、

$\bar{a}(p_0) < +\infty$ に矛盾する。次に $\overline{\mathfrak{M}}$ が係数完備でないことを証明する。

$\overline{\mathfrak{M}}_\nu \ni \bar{a}_\nu$ で $\mathfrak{M}_{\nu-1}$ なる正要素 $\bar{a}_\nu$ ($\nu = 1, 2, \cdots$) を考へるときは 若しも $\overline{\mathfrak{M}}$ が係数完備であるとすれば $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \bar{a}_\nu \in \overline{\mathfrak{M}}$ なる正数 α_ν が存在し、従つて随意な μ に対し $\alpha_{\mu+1} \bar{a}_{\mu+1} \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \bar{a}_\nu \in \overline{\mathfrak{M}}_\mu$ なるべきを以て、$\bar{a}_{\mu+1} \in \overline{\mathfrak{M}}_\mu$ となつて矛盾する。

Space $\mathfrak{M}$ が norm を有し、其 norm が Kantorovich の條件即ち定理2の條件と $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots$, $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$ ならば $\lim_{\nu\to\infty} \|a_\nu\| = 0$ なる條件を満足するときは、$\mathfrak{M}$ が reflexive にして reflexive norm を有することは既に証明されてゐる。此如き二つの space $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ が互に他の conjugate である為の條件として次の定理が成立する。

<u>定理 8</u>　Space $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ が Kantorovich の norm を有し、又 $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ の間に bilinear form $B(a_1, a_2)$ が定義せられて、1) $a_1 \geqq 0$, $a_2 \geqq 0$ ならば $B(a_1, a_2) \leqq 0$, 2) $\|a_1\| = \sup_{a_2 \in \mathfrak{M}_2} |B(a_1, a_2)|$, $\|a_2\| = \sup_{a_1 \in \mathfrak{M}_1} |B(a_1, a_2)|$, 3) 任意の $0 \neq a_1 \in \mathfrak{M}_1$ に對し、$B(a_1, a_2) \neq 0$ にして、$|a_1| \frown x_1 = 0$ ならば、$B(x_1, a_2) = 0$ なるが如き $a_2 \in \mathfrak{M}_2$ が存在し 又 $a_2 \in \mathfrak{M}_2$ に對しても同様な $a_1 \in \mathfrak{M}_1$ が得られるときは $\mathfrak{M}_1$ と $\mathfrak{M}_2$ とは互に他の conjugate である。

<u>証明</u>　$\mathfrak{M}_1$ の conjugate space $\overline{\mathfrak{M}}_1$ は $\mathfrak{M}_2$ を含む。然かも $\mathfrak{M}_2$ の norm が $\overline{\mathfrak{M}}_1$ にして一致することは 2) より容易に証明される。又 3) 及び norm の假定理により、$\overline{\mathfrak{M}}_1$ が $\mathfrak{M}_2$ と其れに直交するものとの直和なることが知られる。$\mathfrak{M}_2$ に直交する要素 $\bar{a}_1$ に對しては、conjugate の性質より $\bar{a}_1(a_1) \neq 0$, にして然かも $B(a_1, a_2) = 0$ ($a_2 \in \mathfrak{M}_2$) なる a_1 が存在することが証明される。故に 2) により $\|a_1\| = 0$ なりて、$\bar{a}_1 = 0$。従つて $\overline{\mathfrak{M}}_1 = \mathfrak{M}_2$ が知られる。

此定理8の應用としては、L_p と L_q ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p, q \geqq 1$) が互に他の conjugate なることが直ちに得られる。又定理8は Kantorovich の norm より広い norm に關して迄拡張せられるが、此処には略することとする。

(1947. 8. 2)