59　K空間について

（阪大）　中 村　正 弘

1. この<u>K空間</u>とゆう言葉は小笠原氏〔6〕に負うものです. それはウエクトル束がノルムを持つBanach空間であるとき. すなはちB束で, 次の二條件を滿すものです.

<u>條件 F</u>　$x_n \downarrow 0$ ならば $\|x_n\| \to 0$

<u>條件 L</u>　$0 \leqq x_n \uparrow$ でノルム有界ならば $\bigvee_n x_n$ が存在する.

この二條件はまた次の

<u>條件 B</u>　ノルム有界なMoore-Smith集合は上(下)限に強收斂する.

とも同等です. 小笠原氏は〔6〕でかくの如きB束の性質を, 前田－小笠原両氏のV束の表現論を驅使されていろいろと研究されておられます. ここではその中の若干の定理を別の方法で証明したいと存じます.

このために G.Birkhoff〔1〕によつてV束に拡張された<u>Hahnの分解定理</u>を使います.

<u>定理1</u>　<u>完備B束上の順連續線型汎函數により</u>　<u>B束は各々の正部分で正, 負, 零の値を与える三つのイデアルの直和に分解される.</u>

これは〔1〕定理 7.25 の証明中で"定理 7.23（または7.24）により"を"順連續性により"と置き替えればそのまゝ成立しますので, 紙面の節約上細い所は略させて頂きます. ただし ここで<u>順連續</u>とは順序について Moore-Smith の意味での連續性で, $x_\alpha \downarrow 0$ のとき $f(x_\alpha) \to 0$ となることで, <u>イデアル</u>とは[illegible]

先生の〔5〕の意味です。この Hahn 分解を使いますと〔6〕§4の理論は遥かに短かくなつただけでそのまま成立しますので，次の定理2が成立します．

<u>定理 2</u>　<u>K空間とその共軛空間のイデアルの作るBoole束は同型である．</u>

このとき同型の對應は互に直交するイデアールの補イデアールを對應させればよいことは小笠原氏〔6〕に示されてある通りであります．このことはK空間が L^p と非常によく似た構造を持つことを暗示して居ります．以下§2で述べることには直接関係しませんが この類似性をある程度まで確められる様に思われます．例えば角谷先生の〔5〕と同じ方法で，K空間でも Wecken の分解が成立しますから K空間の表現を主イデアルの表現に代置することが出来ます．そこで Freudenthal〔4〕の主單位元を持つ場合には共軛束にも主單位元 1 が存在しますから，x に對して 1(|x|) をもつて新しいノルムを與えれば，K空間を連續に AL 空間に写像することが出来ます．このとき 1(x) が順連続であることと，〔1〕定理3.13によりまして，

<u>定理 3</u>　<u>K空間はAL空間の正規部分束と連続同型である．</u>

が証明されます．これはまた同時に L(Ω) 空間が universal K-space であることを意味している様に思われます．このことは以下の証明には無関係であります．

2．本節ではまず〔6〕定理4.4 ― すなはち：

<u>定理 4</u>　<u>K空間はその共軛空間上のすべての順連続線型汎函数と一致する．</u>

を証明したいと存じます．〔6〕§4で小笠原氏が示して居られます通り この点から直ちにK空間の任意の区間が弱コンパクトであることが証明され，またその他にもいろいろな結果が得られます。証明は二三の補題に分れます．

<u>補題 4.1</u>　K空間 E は第二共軛空間 E^{**} 内で正規部分束である．

証明：　$0 \leqq u \leqq x$, $u \in E^{**}$ とします．一般の u について $u \in E$ を証明すればいいのですが，これは Freudenthal〔4〕の有名な定理によつて，x を E^{**} の主單位元と考えたとき，u は特性元の線型和の順極限として近似され，また條件下乃至Bによつて すべての特性元が E に屬することさえ証明されれば u が E に屬することもいえますから，u は特性元であると仮定します．u は x に

よつて限られていますから、E^*の順連続汎函数で、従つて定理1の Hahn分解をE^*に対して行うことが出来ます。その直和因子をN^+とN^0とします。定理2によつて、Eの主イデアルでN^+に対応するものが存在しますが、それはEの特性元の作る主イデアルですから、その特性元をeとします。すると$u \wedge (1-e) = 0$ですから、$u \leqq e$となります。$u < e$ならば$e-u$は定理1によつて0でないE*のイデアルを與えるはずですがこれは不可能です。

<u>補題 4.2</u>　K空間EはE^{**}の中でイデアルである。

証明：[1] 第7章末尾の注意によって、順有界な集合がEの中で上限を持つことを証明すればよいのですが、これは条件Bより明らかです。

定理4の証明：E^*の順連続汎函数をE_0^{**}で示します。$u \in E_0^{**}$で$u \notin E$となるものがあるとすれば、4.2によつてすべての$x \in E$に対して$x \wedge u = 0$が成立するものが存在します。が、これによつてHahn分解を行えれば、その正イデアールは0と異り、Eのすべての元と直交します。これは不可能です。

この定理の逆が成立することは[6]定理4.5に証明されてあります。小笠原氏は表現論を使用され、Vitali-Hahn-Saksの定理を用いられておりますがこの後者の定理はそれに相当するものがV束には与えられておりませんので、次節ではその証明を行いたいと思います。

3. Vitali-Hahn-Saksの定理を次の形で述べます。

<u>定理 5　完備B束上の順連続線型汎函数の可附番列が弱収束するならばその極限もまた順連続である。</u>

以下の証明は本質的には Saks[8] の証明と同じもので、V束にいいかえたに過ぎませんが、Saksの証明の核心に入るまでの若干の準備が必要となりますので、ここに記させて頂きます。まず：

<u>補題 5.1</u>　EとE*が主単位元を有し、E*の主単位元が順連続ならば定理5は成立する。

証明：$x_\alpha \downarrow 0$のとき$f(x_\alpha) \to 0$が成立すればよいのですから$1 \geqq x_\alpha \geqq 0$としても一般性を失いません。但しここで$f_n \to f$（弱）は与えられた汎函数とします。そこで$0 \leqq x \leqq 1$なる区間をIで表すことにします。Iは配分束をなして

完備ですが，仮定によつて $l(x)$ が順連続ですから，$l(x)$ によつて計量を與えれば連続計量束となります，このとき＊収斂は距離収斂と一致しますが，f の連續性は I を距離空間上の函数と考えたときの通常の連続性と一致します。これから後は Saks の証明と同一です．先ず

<u>補題 5.2</u>　$x, a \in I$ を任意の元とし $l(x) < \lambda \leqq 1$ ならば，a を中心とする半径 λ の開球中より I の元 y_1, y_2 をえらび，$y_2 - y_1$ とすることが出來る。

証明：　$y_1 = a \wedge (1-x)$，$y_2 = x + y_1$ とおけば成立します。

補題 5.1 の證明：　$\varepsilon > 0$ として，

$$H_n = \left\{ x \,\middle|\, \varepsilon \geqq |f_n(x) - f_m(x)| \quad m \geqq n \right\}$$

とします。H_n は閉集合で $\bigvee_n H_n = I$ ですから Baire の定理によつてある H_1 は a を中心とする開球で半径 λ のものを含みます。そこで補題 5.2 により，

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(y_2 - y_1) - f_m(y_2 - y_1)| \leqq |f_n(y_1) - f_m(y_1)| + |f_n(y_2) - f_m(y_2)| \leqq 2\varepsilon$$

が $l(x) < \lambda$ なる x と $m \geqq$ なる m について成立します。そこで $|f_n(x)| < \varepsilon$ の成立する 0 の近傍の半径を μ とし，$\delta = \mu \wedge \lambda$ とすれば，$l(x) < \delta$ について $|f_m(x)| < 3\varepsilon$ または $|f(x)| < 3\varepsilon$ となります。

定理 5 の証明：　$l = \sum \frac{1}{2^i} |f_i|$ とすれば $l(x)$ は順連續です。$l(x)$ によつて E を Hahn 分解すれば，零イデアル上では定理の成立は明らかですから正イデアル上で成立することを示せば足ります。$x_\alpha \downarrow 0$ の時 $\bigvee_\alpha x_\alpha = 1$ とれば，補題 5.1 の證明がそのまゝ成立します。從つて 5.1 の仮定は不要となり定理 5 が証明されます。

本來の Vitali-Hahn-Saks の定理の形を得るためには，補題 5.1 の証明の末尾に出て來た δ と ε を使えばいいわけです。この時には 5.1 の仮定は満足されていますから，変更の必要がありません。

4．定理 5 の形で述べた Vitali-Hahn-Saks の定理を用いまして，小笠原氏 [6] の若干の定理を證明致します．まづ定理 4 の逆即ち [6] 定理 4.5 を證明します。

<u>定理 6　共軛空間上の順連続線型汎函数全体ともとの B 束が一致すれば K</u>

空間である、

証 明： 條件Fは明らかですから條件Lを証明します。E^{**}内で$0 \leqq x_n \uparrow$でノルム有界であれば、x_nはあるE^{**}の元に弱収斂しますが それは定理5によってE^*の順連續汎函数となり、従って仮定によりEに屬します。

同様なことが次の二つの定理（[6] 3.1 及び 5.3 ）についても成立します。

<u>定理 7</u>　<u>共軛空間が可分ならばK空間である。</u>

証 明： 仮定によりE^{**}は弱可分となり、従ってHellyの定理によってE^{**}の元はEの元の可附番列によって近似されます。従って定理5によってE^{**}の元はE^*上で順連續となります。これは[6] §1 補題3に注意してあります通り條件Fに他なりません。條件Lは共軛束については常に成立しますからE^*はK空間となります。

<u>定理 8</u>　<u>K空間は弱完備である。</u>

証明： x_nが弱収斂すればその極限は一般にはE^{**}の元となりますが、定理5によってこれはE^*上の順連續であり、従って定理4によってEに屬します。

これらの定理の証明は本質上は小笠原氏[6]のものと同一です。その差はV.G.-Hahn-Saksの定理をいい変えたに過ぎませんが 定理8の証明は具体的なLの弱完備性の証明としてはBanachの本にありますものよりは短いのではないかと考えます。

7. 最後に蛇足ながら、B束における一つの病理的現象を御報告申し上げたいと思います。小笠原氏[6]に従いまして條件Eを満足するとき<u>K^-空間</u>と呼ぶことにします。特にK^-空間が正の基を持つとき数列<u>K^-空間</u>と呼ぶことにします。（基がDunford-Morseの基[2]となる時K空間となります）この時任意のxに対して$0 \leqq y \leqq x$となるyの元の基表示は一様に収斂しますから、数列K^-空間の区間は弱コンパクトのみならず、強コンパクトになります。逆に可分B束で区間が強コンパクトであれば小笠原氏[7]の定理によって数列K^-空間であることがわかります。ところでこの上で0に弱収斂する汎函数列f_nを考えますと$0 \leqq y \leqq x$で$f_n(y)$は一様に収斂しますが、$f_n^+(x) = \sup_{0 \leqq y \leqq x} f_n(y)$ですから、従って$f_n^+(x) \to 0$となります。逆に可分B束で共軛束の束

演算が弱連続であれば $f_n \to 0$ (弱) のとき $f_n^+ \to 0$ (弱) となり, $0 \leq f_n^+(y) \leq f_n(x)$ $\to 0$ となりますから任意の区間で $f_n(x)$ は一様に収斂します. 従って I. Gelfand [3] の定理によつて B束の区間はコンパクトになります. つまり,

定 理 9 可分B束では 其の束の束演算が弱連続のときそのときのみ数列 K^-空間となる.

束演算が一般に弱連続 (元としても汎函数としても) ならぬ例は *Rademacher* の函数列が L, L^p, M 等で正部分が $\frac{1}{2}$ に収斂することからわかります. このことはB束の弱位相の探究が制限を受けることを意味するのではないかと思われます

参 照 文 献

[1] G. Birkhoff, "Lattice Theory", N.Y., 1940

[2] N. Dunford & Morse, Trans. AMS., 40 (1936), 415−420

[3] I. Gelfand, Mat. Sbornik, 4 (1938), 235 − 284.

[4] H. Freudenthal, Proc. Acad. Amster., 39 (1936), 641−651.

[5] S. Kakutani, Ann. Math., 42 (1941), 523 − 537.

[6] T. Ogasawara., 本誌 240 (1942), 1192 − 1231.

[7] T. Ogasawara, Hirosima Journ., 11 (1942) 125 − 128.

[8] S. Saks, Trans. AMS., 35 (1933), 965 − 970

(1947. 7. 8)