# 58. 多元環の analytic linear function

（阪大）　正田建次郎

単純環の問題を Artin は次の如き analytic linear function (a. l. f) なる考へを用ひて巧妙に処理して居ます。環 S の元 $x$ を

$$\sum_{i=1}^{r} a_i x b_i \qquad , a_i, b_i \in S$$

に写す写像を a. l. f と言ふ。a. l. f に関する基本定理として Artin は次の定理を帰納法を用ひて初歩的に証明して居ます。"S を単純環, K をその核心体とする時, K に対して一次独立な $u_1, \dots, u_n$ を任意の $v_1, \dots, v_n$ に写す a.l.f. が存在する。"

特に S が体 K の上の $n$ 階の多元環なる時は, この定理は以前私が正規単純性の鑑別定理の証明に用ひた次の補助定理と同價値であります。"S が K の上の正規単純環なる為に必要且充分な條件は一般元 $x$ に対して, S×S の K の上の階数が $n^2$ なることである"。S の基を $u_1, \dots, u_n$ とし,

$$x = \sum u_i x_i$$

とすれば S×S の元は

$$x' = \sum v_i x_i$$

で, S×S の階数が $n^2$ なることは $v_i$ が任意にとれることを意味して居ます。故に $x \to x'$ なる a. l. f をとれば $u_1, \dots, u_n$ が $v_1, \dots, v_n$ に写され Artin の定理が得られます。逆に Artin の定理から $v_1, \dots, v_n$ が任意にとれることが判り補助定理が得られます。この條件が正規単純なる為の充分條件なることは簡単に証明出来ます。Artin はそれにはふれて居ないようですが

私がこの補助定理を証明した時には 正規単純環の正則表現と逆正則表現の積が直積になり完全行列環になることを用ひましたが, Artin によって初歩的に証明されたのですから, この定理を単純環の理論の出発点にすることも出来るので, Artin はその方法をとって居ます。

Artin の方法によらなくても 多元環の場合なら, 補助定理から正規単純環 S に

數しては $S \times S^{-1}$ が完全行列環になることが判りますから，例へば *Albert* の本に從つても容易に單純多元環の理論が組立てられます。

單位元を有する環が單純環になる爲には 0 以外の元 $a$ を任意の元 $a$ に寫す $a$, $e$, $f$ が存在することが必要且充分なることは容易に判ります。$a$, $e$, $f$ によつて環の性質がどの程度判るか知れませんが一つの巧妙な方法として御紹介します。

（1947. 6. 23）