

56. Infinite Product Spaceの Weak Topology

小松 啓 郎

昭和十九年に位相空間論に一寸書いた事ですが終りの近傍系の所少し不明確と思ひますので此處に再び話します。

TopologyのあるSpace R^X の $X = \{x\}$ Produkt $\cdot R$
記号 $R = P\{R^x | x\}$

とは $P = \{p^x | x \in X\}$ $p^x \in R^x$ なる凡ゆる点 P の集合であつてその
Topologyは先づ projection $\pi^x: P \rightarrow P^x (R \rightarrow R^x)$ が
連続なるものをとるのが普通である。

1) R^x のTopologyが monotone ($M^x \supset N^x \rightarrow \overline{M^x} \supset \overline{N^x}$ in
 R^x)のとき R が monotoneで最も弱い topologyを求むる。

$R \supset M$ に対し $\pi^x(M) = M^x = \{p^x | p \in M\}$ と表せば

" $\overline{M} = P\{\overline{M^x} | x \in X\}$ が求むる topologyである。

是が monotoneなる事は

$$M \supset N \rightarrow (\forall x) M^x \supset N^x \rightarrow (\forall x) \overline{M^x} \supset \overline{N^x} \rightarrow \overline{M} \supset \overline{N}$$

是で π^x が連続なる事は

$$\pi^x(\overline{M}) = \overline{M^x} = \overline{\pi^x(M)}$$

から明かである。又最も弱い事 明である。

2) R で Additive で最も弱い topology を求める。

$M(\mathbb{C})$ の有限被覆 μ

$$\mu: M = M_1 \cup \dots \cup M_{n_\mu}$$

として凡ゆる有限被覆の集合 $\mathcal{M} = \{\mu\}$ とする。 M の closure として

$$\tilde{M} = \bigcap_{\mu} (\overline{M_1} \cup \dots \cup \overline{M_{n_\mu}})$$

とすれば \tilde{M} は求める最も弱い additive topology である。

\tilde{M} が additive topology \cup \overline{M} で最も弱いことは、

Additive topology は monotone であるから任意の部分集合 N で

$$a_N \subset \overline{N}$$

$$\text{故に } a_{\tilde{M}} = a_{\overline{M}} \cup \dots \cup a_{\overline{M_{n_\mu}}} \subset \overline{M_1} \cup \dots \cup \overline{M_{n_\mu}}$$

$$\therefore a_{\tilde{M}} \subset \tilde{M}$$

次に \tilde{M} が additive なることは 任意の分割 $M = A \cup B$ に對し A, B

の有限被覆の集合 $\mathcal{A} = \{\alpha\}$ $\mathcal{B} = \{\beta\}$ とすれば 定義から

$$\hat{A} = \bigcap_{\alpha} (\overline{A_1} \cup \dots \cup \overline{A_{n_\alpha}}),$$

$$\hat{B} = \bigcap_{\beta} (\overline{B_1} \cup \dots \cup \overline{B_{n_\beta}})$$

$$\hat{A} \cup \hat{B} = a_{\mathcal{A}, \mathcal{B}} \left(\bigcup_{\alpha} \overline{A_i} \cup \bigcup_{\beta} \overline{B_i} \right)$$

扱て (α, β) は M の有限 $\mu: M = A_1 \cup \dots \cup A_{n_\alpha} \cup B_1 \cup \dots \cup B_{n_\beta}$ を一つ

定める。即ち \mathcal{M} の部分集合である。 故に

$$\hat{A} \cup \hat{B} \supset \tilde{M}$$

逆に M の有限被覆 $\mu: M = M_1 \cup \dots \cup M_{n_\mu}$ を任意一つとれば

$$\alpha: A = \bigcup_{i=1}^{n_\mu} (M_i \cap A) = \bigcup A_i,$$

$$\beta: B = \bigcup_{i=1}^{n_\mu} (M_i \cap B) = \bigcup B_i$$

と A, B の有限被覆 α, β が定まる。且つ $M_i \supset A_i \cup B_i$ から

$$\overline{M_i} \supset \overline{A_i}, \quad \overline{M_i} \supset \overline{B_i} \text{ である。}$$

故に

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} {}^m M_i \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} {}^m A_i \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} {}^m B_i \supset \tilde{A} \cup \tilde{B}$$

$$\therefore \tilde{M} \supset \tilde{A} \cup \tilde{B}$$

最後に \tilde{M} で π^x が連続なることは

$$\pi^x(\tilde{M}) \subset \pi^x({}^m M) = \overline{\pi^x(M)}$$

3) 以上の *weak topology* を近傍系で考へる。先づ U^x を R^x で p^x の近傍とする。即ち $\overline{U^x} = R^x - U^x \ni p^x$ とする。 ${}^m M$ topology で

$$U = U^x \times P' \{R^y \mid y \in X - x\}$$

は点 p ($\pi^x(p) = p^x$) の近傍である。

$${}^m U' = \overline{{}^m U^x \times P' \{R^y\}} = \overline{U^x} \times P' \{R^y\}, \overline{U^x} \ni p^x$$

であるから ${}^m U' \ni p$

R^x で p^x の R による近傍系 U_x^x , x を X の R をとつて生ずる R による近傍 $\{U_x^x\}$ が点 p の近傍系を作る。

何と云へば N を点 p の任意の近傍とする。故に ${}^m N' \ni p$. 即ち

$$P \{N^x \mid x \in X\} \ni p,$$

故に ある x で $N^x \ni p^x$. 即ち $(N^x)'$ は P^x の一つの近傍 U^x

即ち $N^x = U^x$ である。

$$N' \subset P \{N^x \mid x \in X\} \subset U^x \times P' \{R^y \mid y \in X - x\} = U_{\delta, x}$$

であるから $N \supset U$. 即ち N は点 p の近傍である。

4) 次は *Weakest additive topology* \tilde{M} の近傍系を定める。

$\tilde{M} \subset {}^m M$ であるから ${}^m M$ で p の近傍 $U_{\delta, x} = U^x \times P' \{R^y\}$ は又 \tilde{M} で p の近傍である。 *additive* から U_1, U_2 を此の如き近傍とすれば $U_1 \cap U_2$ は又 p の近傍である。

逆に $\{U_{\delta, x}\}$ を近傍系の *subbase* とする *topology* を考へれば '題 *additive* である。即ち此の *topology* は ${}^m M$ より強いうちでも *additive* *topology* であつて \tilde{M} である。

従つて R^X が又凡て *additive topology* であるならば M での近傍系は普通の *weak topology* に一致する。即ち、

$$U_1 \cap \dots \cap U_n: \begin{cases} U_i = U_i^{x(i)} \times p^{-1}\{R^Y | y \in \lambda - x(i)\} \\ \overline{U_i^{x(i)}} \ni p^{x(i)} \\ x(i) \neq x(j) \quad \wedge i \neq j \end{cases}$$

が点 $p = \{p^x\}$ の近傍である。

R^X が *monotonic topology* ならば必ずしもこれのみとは言へない。

$$U_1 = U_1^x \times p^{-1}\{R^Y\} \quad \overline{U_1^x} \ni p^x$$

$$U_2 = U_2^x \times p^{-1}\{R^Y\} \quad \overline{U_2^x} \ni p^x$$

とすれば $U_1 \cap U_2$ は M topology で p の近傍であるが

$$U_1 \cap U_2 = (U_1^x \cap U_2^x) \times p^{-1}\{R^Y\}$$

と表すとき $\overline{(U_1^x \cap U_2^x)}$ $\ni p^x$ とは限らない。

例へば $R' = \{a, b, c\}$ topology は $\bar{a} = b, \bar{b} = a, \bar{c} = c,$

$$\overline{a \cup b} = \overline{a \cup b}, \overline{b \cup c} = a \cup c, \overline{a \cup c} = a \cup b \cup c, \overline{a \cup b \cup c} = a \cup b \cup c.$$

R^2 は線分 I ($0 \leq t \leq 1$) で普通の topology.

とする。 R' で点 a の近傍は $\{b \cup c, a \cup b, a \cup b \cup c\}$ であり、 $R' \times R^2$ で M topology では $p = (a, t)$ の近傍は

$$U_1 = (a \cup b) \times I, \quad (b \cup c) \times I = U_2$$

を持つ。故に $U_1 \cap U_2 = b \times I$ は又 $p = (a, t)$ の近傍であるが b は R' で a の近傍ではない。

(1947. 6. 11)