55. 或ル群ノ測度ニツイテ

遠山 啓 (東京工大)

群測度ノ概念ヲ最初ニ導入シタノハ A. Hurwitz (Gött, Nachr, 1897) デアツタ. 彼ハ unitary 群及ビ直交群ノ測度ヲ一般化シタ極座標ヲ用ヒテ explicit ニ求メテヰル. コヽデハ unitary 群, unitary symplectic 群及ビ直交群ノ測度ヲ Cayley ノ parameter ヲ用ヒテ表ハサウト思フ. マヅ $\mathfrak{a}$ ヲ n^2 個ノ複素数ノ成分ヲ有スル n 次ノ正方行列ノ作ル $2n^2$ 次元ノ Euclid 空間トスル.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

コノ空間ノ線素 ds ハ

$$ds^2 = \sum_i \sum_k |da_{ik}|^2 = Sp(\widetilde{dA}\, dA)$$

デ表ハサレル。但シ Spハ跡。$\widetilde{dA}$ ハ dA ノ Hermite 共軛ヲ表ハス。

ヲ任意ノ unitary行列 U ハ Cayley ノ parameter デ次ノヤウニ表サレル。

$$U = (E - iH)^{-1} (E + iH)$$

コノトキ U ノ集合 $\mathfrak{U}$ ハ $\mathfrak{A}$ ノ部分集合体ヲ作ル。U ノ微分ヲ作ルト

$$dU = (E - iH)^{-1} (2idH)(E - iH)^{-1}$$

一方 dU ヲ左側カラ或ル Unitary ナ群要素 V デ移動シテ VdU トスル。

ソノ所ノ要素ヲ ds' トスルト（但シ $2i$ ヲ省ク）

$$ds'^2 = Sp(\widetilde{dU}\,\widetilde{V}\,VdU) = Sp(\widetilde{dU}dU) = ds^2$$

即チ V ハ $\mathfrak{U}$ ノ中デーツノ motion ヲ引キ起ス。之ハ右側デモ同ジデアル。

ds^2 ヲ H デ表ハスト

$$ds^2 = Sp((E+iH)^{-1}\widetilde{dH}\cdot(E+iH)^{-2}(E-iH)^{-2}dH(E-iH)^{-1}$$

$$= Sp\cdot((E+H^2)^{-1}\ \widetilde{dH}\,(E+H^2)^{-1}dH)$$

コノ ds デ体積ヲ測レバ、之ガ Haar 測度トナルコトハ明ナデアル。

コノ形デ $\mathfrak{h}$ ヲ計算スルコトハ困難デアルカラ、之ノヤウナ考ヘヲ用ヒル。

マヅ parameter H ノ空間ヲ $\mathfrak{h}$ トシテ之ニ Euclid ノ計量ヲ導入スル。 $dt^2 = Sp(\widetilde{dH}\,dH)$.

$\mathfrak{U}$ ノ中デ $U \to V^{-1}UV$ ナル変換ヲ行ヘバ、之ニ對應シテ

$$H \to V^{-1}HV$$

ナル変換ガ起ル。之ハ又 $\mathfrak{U}$ 及ビ $\mathfrak{h}$ ニオケル motion デアル。特ニ H ヲ對角線ニ変換スル V ヲ選ンデ

$$V^{-1}HV = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & 0 \\ 0 & & \ddots\ \lambda_n \end{pmatrix} = D$$

トスル。コノトキノ線素ハ

$$ds'^2 = Sp(\{(E+D^2)^{-1}dH'\}^2) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(1+\lambda_i^2)^{-1}(1+\lambda_k^2)^{-2}$$

$$dH_{ik}\,dH_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(1+\lambda_i^2)^{-1}(1+\lambda_k^2)^{-1}|dH_{ik}|^2$$

コノ形ハ直交的ナ parameter ヲ表ハス。

$$\sqrt{g} = \sqrt{\prod_{i=1}^{n} (1+\lambda_i^2)^{-2} \prod_{i<k} (1+\lambda_i^2)^{-1} (1+\lambda_k^2)^{-1}} = \prod (1+\lambda_i^2)^{-n} = |E+D^2|^{-n}$$

之ハ明カニ $|E+H^2|^{-n}$ ニ等シイ.

故ニ次ノ定理ヲ得ル.

定理 1 n次ノ unitary 群ヲ Cayley ノ parameter H デ表ハスト ソノトキノ測度 $d\Omega$ ハ

$$d\Omega = |E+H^2|^{-n} dh$$

デ表ハサレル. 但シ dh ハスベテノ H ノ変数ノ微分ノ積デアル.

次ニ unitary symplectic 群ニ移ラウ. 同ジ論法ヲ適用スルタメニ対角線型ニ変換スル必要ガアル. ヨッテ次ノ定理ヲ証明スル.

定理 2 unitary symplectic 行列(以下 US－行列ト名ヅケル)ハ他ノ或ルUS－行列ニヨッテ対角線型ニ直スコトガ出来ル.

証明 任意ノ $2n$次ノUS－行列ヲ S トスル. 又

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$$

ナル行列ヲ用ヒルト $S^T Q S = Q$ トナル, S ノ一ツノ固有値ヲ λ トスル. ソノトキノ固有ベクトル X トスルト

$$SX = X\lambda$$

之カラ

$$S(Q\overline{X}) = (Q\overline{X})\overline{\lambda}$$

ヲ得ルカラ $\overline{\lambda}$ ナル固有値ノ存在ト $Q\overline{X}$ ナル固有ベクトルヲ有スルコトガ分ル.

今Sガ $2n$ 個ノ異ナッタ固有値ヲ有スル. 即チ entarten シテヰナイト仮定スル. コノトキスベテノ根ハ単位円上ニ、シカモ実軸ニ対称ニ並ンデヰル. 上半面上ニアル n個ノ根ヲ $\lambda_1, \lambda_2 \cdots\cdots \lambda_n$ トスルト $\overline{\lambda_1}, \overline{\lambda_2} \cdots\cdots \overline{\lambda_n}$ ガ他ノ n個トナル. コノ λ_i ハ決シテ ± 1 デハアリ得ナイ. $\lambda_1 = \pm 1$ デアッタラ $\overline{\lambda_1} = \lambda_1$ デ 固有ベクトルハ X ト $Q\overline{X}$ デアル. コノ二ツハ明カニ

$$\overline{X} Q \overline{X} = 0$$

トナルカラ entarten シテヰルコトトナリ, 仮定ニ反スル. $\lambda_1 \lambda_2 \cdots\cdots \lambda_n$ ノ固有ベクトルヲ $X_1\ X_2, \cdots\cdots X_n$ トシテ、ソレヲ横ニ並ベタ $2n$行. n 列ノ行列ヲ $\mathfrak{X}$ デ表ハス.

$$\mathfrak{x} = (x_1, x_2 \cdots\cdots x_n)$$

コノトキ $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2 \cdots\cdots \bar{\lambda}_n$ ニ対スルモノハ $Q\bar{\mathfrak{x}}$ デアル. コヽデ

$$\Sigma = (\mathfrak{x}, -Q\bar{\mathfrak{x}}).$$

ト置ク. Σ ガ US—行列デアルコトヲ示サウ.

$$\Sigma^T Q \Sigma = \begin{pmatrix} \mathfrak{x}^T Q \bar{\mathfrak{x}} & -\mathfrak{x}^T \bar{\mathfrak{x}} \\ \bar{\mathfrak{x}}^T \mathfrak{x} & -\bar{\mathfrak{x}}^T Q \bar{\mathfrak{x}} \end{pmatrix}$$

ココデ $\mathfrak{x}^T Q \mathfrak{x} = \mathfrak{x}^T S^T Q S \mathfrak{x} = \Lambda \mathfrak{x}^T Q \mathfrak{x} \Lambda$,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

コノ各要素ヲ w_{ik} トスレバ上ノ式カラ

$$\lambda_i w_{ik} \lambda_k = w_{ik}$$

従ッテ, $(1 - \lambda_i \lambda_k) w_{ik} = 0$

ヲ得ル. コヽデ $\lambda_i\ \lambda_k$ ハ最初ノ条件ニヨリ決シテ 1 トハナラヌ. 故ニ $w_{ik} = 0$

故ニ結局

$$\Sigma^T Q \Sigma = Q$$

ヲ得ル. 即チ Σ ハ US デアル. コノ Σ デ

$$\Sigma^T S \Sigma = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \bar{\Lambda} \end{pmatrix}$$

トナルコトハ明ラカデアル.(1) 一方 Symplectic ナル条件ハ H ニ對スル linear ナ條件トナリ (Weyl, Classical groups: 169)

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ \bar{H}_{12} & -H_{11}^T \end{pmatrix}$$ トカケル.

H_{11} ハ凡ソ Hermite 行列. H_{12} ハ對稱行列デアル.

---

(1) entartet シテヰルトキハ H ニ対スル條件ガツクコトカラ H ノ中デ, nirgendsdicht トナリ. entartet シナイモノデ近似シテ行ケバ, 求メル結局ヲ得ル. (証明略)

$\boxed{\text{定理 3}}$ $2n$次ノUS群ノ測度 $d\Omega$ ハ

$$d\Omega = |E+H^2|^{-(n+\frac{1}{2})}dh$$

デ與ヘラレル。

直交群ニツイテハ對角線ノ定理ハ成立シナイガ，2次ノ Skew-sym ナ行列ニ分解スルカラ H ハ對角線型トナル．從ツテ同ジク次ノ定理ヲ得ル．

$\boxed{\text{定理 4}}$ n次ノ直交群ノ測度 $d\Omega$ ハ

$$d\Omega = |E+H^2|^{-(\frac{n-1}{2})}dh$$

デ與ヘラレル．

最後ニ注意スベキコトハ各ノ場合ノ指数ハソノ群ノ次元数ヲ行列ノ次数デ割ッタモノデアル事デアル．

同ジコトガ ultra-Lorentz 群ニモ言ヘル答デアル．

(1947. 5. 24)