51. 部分群の作る束が上半もぢゅらなる有限群

阪大　佐藤　正次

有限群 $\mathfrak{G}$ の部分群全部の作る束 L($\mathfrak{G}$) が *modular* なる場合を岩澤氏[1]が決定して居られますが、此の場合 $\mathfrak{G}$ を特徴づける本質的な事柄は大部分 L($\mathfrak{G}$) が上半もぢゅら束は *ausgeglich* なる事及び一般の有限群に於て部分群 $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ が $[\mathfrak{A}]=a$, $[\mathfrak{B}]=b$　$(a, b)=1$　(但、[ ] ハ位数を示す) とすれば $[\mathfrak{A}\smile\mathfrak{B}]\geqq ab$, $ab\,|\,[\mathfrak{A}\smile\mathfrak{B}]$ なる事、及 *nilpotent* な有限群は常に、下半もちゅらなる事、を用ふるならば岩澤氏の論文の *Hilfssatz* 3 ― 10 が殆ど同じ形で上半もぢゅら群（この様に略称します）について成立する事が分ります。

但 *Hilfssatz* 8. の証明は少し複雑になります方針は上論文と同様です. *Hilfssatz* 10. は次の様に変形しないと成立しません.

"$\mathfrak{G}$ を上半もぢゅら群 $[\mathfrak{G}]=p^{\alpha}q^{\beta}$, $p>q$. p, q は素数とし二つの q-*Sylow* 群 $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2$ があれば $P\in\mathfrak{G}$. $P^p=1$ $P\mathfrak{Q}_1P^{-1}=\mathfrak{Q}_2$ なる元 P が存在する" 即ち $[\mathfrak{G}]$ が二種類の素数のベキ積なる事が必要です. 此れが *Hilfssatz* 11, 13 の成立しない原因になります.

以上により次の定理が成立します.

定理 1. $[\mathfrak{G}]=p^{\alpha}q^{\beta}$　$p>q$　p, q は素数なる *non-nilpotent* な群 $\mathfrak{G}$ は次の條件を満足する時且その時に限り、上半もぢゅらである.

1). p-Sylow 群は *elementary abelean*：$(p, \cdots\cdots, p)$型 $\mathfrak{P}$ と書く

2). q-Sylow 群は *cyclic*　$\mathfrak{Q}=\{Q\}$.

3). 任意の $P\in\mathfrak{P}$ に対し

$QPQ^{-1}=P^{r}$;　r は $\mathfrak{G}$ のみにより（Qを固定すれば）

一意的に定まる常数で $r \not\equiv 1 \mod p$, $r^{q^{\beta'}} \equiv 1 \mod p$.
但 $1 \leqq \beta' \leqq \beta$. β' は $\mathfrak{G}$ のみで定まる. 勿論上の合同式を満足する最小のものを β' とするのである. 特に $\beta' = 1$ なる時 $L(\mathfrak{G})$ は 下半もぢゅら 従って $\mathfrak{G}$ は M-群 になります.

注意 $\mathfrak{G}$ の q-Sylow 群の二つの mean の内で maximal な位数を持つものは、全ての q-Sylow 群に共通で位数は $q^{\beta-\beta'}$.

一般の位数を持つ群が 上半もぢゅら なる時に直積に分解するには 岩澤氏の論文の Hilfssatz 12 に対応するものだけが成立します. 証明は全く同様です. 即ち "$\mathfrak{G}$ を 上半もぢゅら $[\mathfrak{G}] = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}$ $p_1 > p_2 > p_3$ 素数, $\mathfrak{P}_i$ を p_i-Sylow 群 とする時 若し $\mathfrak{P}_1 \cup \mathfrak{P}_2$ が non-nilpotent ならば $\mathfrak{P}_1 \cup \mathfrak{P}_3$ 及 $\mathfrak{P}_2 \cup \mathfrak{P}_3$ は共に nilpotent になる" 此れを用ひて任意の位数の上半もぢゅら群 $\mathfrak{G}$ を直積に分解すれば 其の直既約な non nilpotent な因子は,

$(\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \cdots \times \mathfrak{P}_r)\mathfrak{Q}$ (こゝで $\mathfrak{P}_i$, $\mathfrak{Q}$ は $\mathfrak{G}$ の p_i-Sylow 群, q-Sylow 群である) なる型で $\mathfrak{P}_i \cup \mathfrak{Q}$ は全て定理1に与へられた構造を有する事は直ちに解ります.

以上の如き構造の位数が $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} q^{\beta}$ · $p_1 > p_2 > p_3 > \cdots > p_r > q$. なる群が 上半もぢゅら なる為の必要充分な条件は 各 $\mathfrak{P}_i \cup \mathfrak{Q}$ に於て定理1に於る $r_i^{q^{\beta_i'}} \equiv 1 \mod p_i$ $1 \leqq \beta_i' \leqq \beta$ を与へる β_i' について $\beta_i' \neq \beta_j'$ $(i \neq j)$ が成立する事である.

証明は容易ですが長くなりますから略します.

以上により 上半もぢゅら な有限群は完全に決定されました. 即ち

定理 2. 有限群 $\mathfrak{G}$ が 上半もぢゅら なる為の完全条件は、次の様な様な構造を有する事である.

$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \times \cdots \times \mathfrak{A}_v \times \mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2 \times \cdots \times \mathfrak{R}_s$ 各因子の位数は互に素 ここで $\mathfrak{R}_i$ は r_i-Sylow 群($\mathfrak{G}$ の)で上半もぢゅら 即ち もぢゅら なるもの [岩澤氏の論文参照]
$\mathfrak{A}_i$ は下の様な構造を有す. 代表的に $\mathfrak{A}$ と書いて

$\mathfrak{A}_i = (\mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \cdots \times \mathfrak{P}_j)\mathfrak{Q}$ $[\mathfrak{A}] = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_j^{\alpha_j} q^{\beta}$ $p_i > q$ $i = 1, \cdots, j$.
$p_h \neq p_k$ $(h \neq k)$ $\mathfrak{P}_i$, $i = 1, \cdots, j$. $\mathfrak{Q}$ は全て $\mathfrak{G}$ の Sylow 群で

1). $\mathfrak{P}_i$ は全て *elementary abelean*

2). $\mathfrak{Q}$ は *cyclic* $= \{Q\}$.

3). $\mathfrak{P}_i \cup \mathfrak{Q}$ は全て *non-nilpotent* で

任意の $P_i \in \mathfrak{P}_i$ に対し $QP_iQ^{-1} = P_i^{r_i}$. なる r_i は $\mathfrak{G}$ 及 i

のみに（Q を固定すれば）*depend* する常数で $r_i \not\equiv 1 \bmod p_i$

$r_i^{q^{\beta'_i}} \equiv 1 \bmod p_i \quad 1 \leqq \beta'_i \leqq \beta$

但 β'_i は r_i に対して上の如き関係の成立する最小のものとする

4). $\beta'_m \neq \beta'_n \quad (m \neq n)$

註1. — 岩澤氏：*Über die endlichen Gruppen u. die Verbände ihrer Untergruppen*

東大理科報告 1941.

(1947. 5. 7)