49. Lie 環の Cartan 分解について

松島與三 (名大)

Killing, Cartan 以来 Lie 環の研究に於て, 正則元による Lie 環の固有空間への分解が重要な役割を演じてゐる。$\mathfrak{L}$ を複素数体上の Lie 環, t をその1つの正則元とする。$[t, x] = D_t x$ とおき, $\mathfrak{L}$ を1次変換 D_t の固有空間の直和に分解する。このとき D_t の固有値 0 に対応する固有空間 $\mathfrak{L}_0$ は正則元 t をふくむ極大巾零部分環であり, 0 以外の固有値に対応する固有空間を, もし必要であれば, 更に分解し, 結局次の様な $\mathfrak{L}$ の分解が得られる。

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0 + \mathfrak{L}_\alpha + \mathfrak{L}_\beta + \cdots\cdots$$

$$[\mathfrak{L}_\alpha, \mathfrak{L}_\beta] \subseteq \mathfrak{L}_{\alpha+\beta}.$$

こゝに $\mathfrak{L}_0$ の任意の元 h は $\mathfrak{L}_\alpha$ で唯1つの固有値 $\alpha(h)$ をもつ。$\alpha, \beta, \cdots\cdots$ を根値とよぶ。$\mathfrak{L}_0$ の次元を l とすれば $\alpha, \beta,$ は l 個の変数 $\lambda_1 \cdots\cdots \lambda_l$ の1次型式と考へられる。
$\mathfrak{L}$ の他の正則元 t' から出発すれば, $\mathfrak{L}$ の別の分解

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_0' + \mathfrak{L}_{\alpha'}' + \mathfrak{L}_{\beta'}' + \cdots\cdots$$

が得られる。

$\mathfrak{L}$ が半単純の場合, これら2つの分解に出てくる, 正則元をふくむ極大巾零部分環（この場合は可換になるが）は $\mathfrak{L}$ の内部同型により互にうつること, すなはち, $\mathfrak{L}_0' = \sigma \mathfrak{L}_0$ なる内部同型 σ があることが Cartan により示された。又 Gantmacher は, この定理に Cartan のよりもつとわかりやすい証明を与へてゐる。[1] こゝでは上のことが $\mathfrak{L}$ が半単純でなくても一般の Lie 環で成立つことを証明したい。

$\mathfrak{G}$ を $\mathfrak{L}$ に対応する Lie 群とする。$a \in \mathfrak{L}$ とするとき, a を単位元に於ける切線 vector とする様な one parameter subgroup を $\exp ta$ とかくことにしやう。
$\mathfrak{L}$ の1つの basis を $a_1, \cdots\cdots a_r$ とし, $a = t_1 a_1 + \cdots\cdots$

$+t_r a_r$ とし $(t_1\cdots\cdots t_r)$ が $(0\cdots\cdots 0)$ に十分近いとき.
$\exp(a)=\exp(t_1a_1+\cdots\cdots+t_ra_r)\in\mathfrak{G}$ が定義される。
$t_1\cdots t_r$ は $\exp(a)$ の Canonical parameter である。
$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{L}$ の部分環とするとき $\mathfrak{h}$ に対応する $\mathfrak{G}$ の部分群を $\exp\mathfrak{h}$ とかくことにする。 $\exp(ta)$ を $\mathfrak{G}$ の元 g で transform すれば、新しい one parameter subgroup $\exp(ta')$ を得る。$a\to a'$ は $\mathfrak{L}$ の同型対応 A_g を与へる。これを $\mathfrak{L}$ の内部同型とよぶ。

今、$g=\exp a$ とすれば、$A_g=\exp D_a$ とかける。但し $D_a x=[a,x]$, $x\in\mathfrak{L}$. $\mathfrak{L}$ を A_g で固有空間に分解する。

$$\mathfrak{L}=\mathfrak{R}_1+\mathfrak{R}_\rho+\cdots\cdots$$

但し、$\mathfrak{R}_1$、$\mathfrak{R}_\rho\cdots\cdots$ は A_g の固有値 $1,\rho,\cdots\cdots$ に対応する固有空間とする。このとき A_g が同型対応であるから $\mathfrak{R}_1$ は部分環をつくる

補題　u が $\mathfrak{G}$ の単位元の近傍をうごくとき.

$\{u^{-1}g\exp\mathfrak{R}_1 u\}$ は g のある近傍をふくむ

(証)

$\mathfrak{R}_1=(a_1\cdots\cdots a_s)$, $\mathfrak{R}_\rho+\cdots\cdots=(a_{s+1}\cdots\cdots a_r)$ とする.
$g^{-1}\exp(-(t_{s+1}a_{s+1}+\cdots\cdots+t_ra_r))g\exp(t_1a_1+\cdots\cdots+t_sa_s)\cdot\exp(t_{s+1}a_{s+1}+\cdots\cdots+t_ra_r)=\exp(p_1a_1+\cdots\cdots+p_ra_r)$ とおくとき、$p_1\cdots p_r$ は t_i の analytic function である。$\exp(\Sigma p_ia_i)$ が単位元の近傍をふくむことがよい。
これには、函数行列式 $\dfrac{\partial(p_1\cdots p_r)}{\partial(t_1\cdots t_r)}$ が $t_i=0$ で 0 でないことがいへればよい。
$1\leq j\leq s$ のとき $\left(\dfrac{\partial p_i}{\partial t_j}\right)_{t=0}$ を考へやう.

$t_i=0\ (i\neq j)$ とおけば

$\exp(p_1a_1+\cdots\cdots+p_ra_r)=\exp(t_ja_j)$ であるから.
$p_i(0\cdots\cdots t_j\cdots\cdots 0)=\delta_{ij}t_j \qquad 1\leq j\leq s$

故に　$\left(\frac{\partial p_i}{\partial t_j}\right)_{t=0} = \delta_{ij} \qquad 1 \leqq j \leqq s$

次に　$s+1 \leqq j \leqq r$　の場合．　$t_i = 0 \quad i \neq j$　とおけば

$$g^{-1}\exp(-t_j a_j) g \exp(t_j a_j) = \exp(-t_j A_g(a_j))\exp(t_j a_j)$$
$$= \exp(p_1 a_1 + \cdots + p_r a_r)$$

であるから．$t_j = 0$ で微分することにより

$$(1 - A_g) a_j = \left(\frac{\partial p_1}{\partial t_j}\right)_{t=0} a_1 + \cdots + \left(\frac{\partial p_r}{\partial t_j}\right)_{t=0} a_r$$

しかるに　$1 - A_g$　$\mathfrak{E}_\rho + \mathfrak{E}_\sigma + \cdots\cdots = \{a_{s+1} \cdots a_r\}$ をそれ自身にうつし．しかも．そこで．*non-singular* であるから．

$$\left(\frac{\partial p_1}{\partial t_j}\right) = \cdots\cdots = \left(\frac{\partial p_s}{\partial t_j}\right) = 0 \qquad s+1 \leqq j \leqq r$$

$$\det.\left(\left(\frac{\partial p_i}{\partial t_j}\right)_{t=0}\right)_{s+1 \leqq i, j \leqq r} \neq 0$$

故に　$\dfrac{\partial(p_1 \cdots\cdots p_r)}{\partial(t_1 \quad\quad t_r)}_{t=0} \neq 0$　である

以上

$a_1, \cdots\cdots, a_r$ を $\mathfrak{L}$ の 1 つの *basis* とし．$a = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r$，$b = \mu_1 a_1 + \cdots + \mu_r a_r$ を 2 つの正則元，a, b をふくむ極大巾零部分環を夫々 $\mathfrak{h}_a$，$\mathfrak{h}_b$ としやう。まづ．a, b の *parameter* $(\lambda), (\mu)$ が十分近ければ．$A_u \mathfrak{h}_a = \mathfrak{h}_b$ なる内部同型 A_u が存在することを證明しやう。十分小さい正数 ξ をえらんで．$D_{\xi a}$，$D_{\xi b}$ が $2\pi\sqrt{-1}$ の整数倍である様な固有値をもたない様に出来る．
ξ が小さければ．$\exp(\xi a)$，$\exp(\xi b)$ が定義される。
$\exp(\xi a) = g$．$\exp(\xi b) = h$ とおかう。
A_g で $\mathfrak{L}$ を分解し　$\mathfrak{L} = \mathfrak{E}_1 +$　　　　とするとき．

$A_g = \exp D_{\xi a}$ で．$D_{\xi a}$ は $2\pi\sqrt{-1}$ の整数倍である様な固有値をもたないから　$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{h}_a$ である．

従って．u が単位元の近傍をうごくとき．$\{u^{-1} g \exp \mathfrak{h}_a u\}$ は g の近傍をふくむ。しかるに　$g \exp \mathfrak{h}_a \leqq \exp \mathfrak{h}_a$ であり．(μ) が (λ) に十分近ければ．h は g に十分近いのであるから．

$$h = \exp \xi b \in u^{-1} \exp \mathfrak{h}_a u = \exp A_u \mathfrak{h}_a$$

次に a, b を任意の正則元としやう。$\mathfrak{L}$ の *Killing* の方程式を

$|tE-(\xi_1 D_{a_1}+\cdots+\xi_r D_{a_r})| = t^r+\psi_1(\xi)t^{r-1}+\cdots+\psi_{r-l}(\xi)t^{l}$

とするとき　正則元は $\psi_{r-l}(\xi_1\cdots\xi_r)\neq 0$ なる parameter の値に対応する元であり，又正則でない元は $\psi_{r-l}(\xi_1\cdots\xi_r)=0$ なる parameter に対応するから，正則でない元全体は複素次元が r より少くとも1つすくない manifold をつくる。従って正則元全体は連結開集合である。故に任意の2つの正則元 a, b は正則元の中で，連続曲線でむすぶことが出来る。Curve 上の各点 c に，$d\in \mathfrak{U}_c \to \mathfrak{h}_d = A_u \mathfrak{h}_c$ となる様な近傍 $\mathfrak{U}_c$ を対応させて Curve をおほふ。そのとき，Curve の finite covering $\mathfrak{U}_{c_0}, \mathfrak{U}_{c_1}, \cdots\cdots, \mathfrak{U}_{c_m}$　$c_0=a,\ \ c_m=b$　をえらび，$c_i\in\mathfrak{U}_{c_{i-1}}$ なる様にとる。

そのとき，$A_{u_0}\mathfrak{h}_{c_0}=\mathfrak{h}_{c_1}$，$A_{u_1}\mathfrak{h}_{c_1}=\mathfrak{h}_{c_2}$，$\cdots\cdots$，$A_{u_{m-1}}\mathfrak{h}_{c_{m-1}} = \mathfrak{h}_{c_m}$ なる，内部同型 $A_{u_0}, A_{u_1}, \cdots\cdots A_{u_{m-1}}$ が存在する。

$A = A_{u_{m-1}} A_{u_{m-2}} \cdots\cdots A_{u_1} A_{u_0}$ とおけば，

$A\,\mathfrak{h}_a = \mathfrak{h}_b$　である。

これを纏めれば，

定理）Lie 環 $\mathfrak{L}$ の任意の2つの正則元をふくむ極大巾零部分環 $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$ があれば，$\mathfrak{h}' = A\mathfrak{h}$ なる $\mathfrak{L}$ の内部同型 A が存在する。

$\mathfrak{L}$ の2つの Cartan 分解があれば，一方より他方へは，$\mathfrak{L}$ の内部同型でうつり，根係の系 $\{\alpha, \beta, \cdots\cdots\}$ は1次型式とみて，如何なる Cartan 分解に於ても一致する。

註．1）　Gantmacher, Recueil Math. 47, 1939

(1947. 5. 6)