42. *Dérivé-opération* ニ依ル位相空間

松　下　眞　一（九大）

コレラヤッテキタ頃カラ既ニ二ヶ年モ經ッタ。終戰トナッテモ單ナル紹介以上ノ報告ヲスル機会ガ無カッタノデ，コノ誌上ニ一応アル程度ノ詳シイ記述ヲヤッテ見タイト思フ。

ナホ，此ノ方面ノ研究ニツイテ，近藤基吉先生カラタマハッター方ナラヌ御指導ノ労ヲ衷心ヨリ感謝致シマス。

（1）

先ヅ問題ハ　点ノナイ位相空間ノ構成デアル．ソレニ対シテ *Kuratowski* ノ方法[1]ヲ　更ニ代数化サレタ寺阪教授ノ方法[2]ハ興味深ク且ツ美シイ理論デアル．—— 所謂 *Kuratowski*-寺阪ノ代数 ——

所デ夫等ハ *fermeture-operation* (*closure-operator*) ニ依ッテ構成サレタモノデアルガ　ソノ代リニ *dérivé-operator* ヲ用ヒタナラバ，ドウナルカト云フト，*fermeture* ニ対スル色々ノ関係ガ *dérivé* ノ中ニ美シク *modifier* サレルノミナラズ，*opération* $D(X)$ ト X° トノ対応ガ[3] 導集合ト 閉核ノ対応ノ直接ナ再現トシテ得ラレ，アル意味デノ並行性ガ考ヘラレルノデアル。

（2）

$\mathcal{L}$ ヲ *coole* 代数トシ，單位－及ビ零－要素ヲ夫々 1 及ビ 0 デ，$X \in \mathcal{L}$ ノ *complément* ヲ X^{c} デアラハス。サテ $\mathcal{L}$ ヲ $\mathcal{L}$ 自身ニワッス *homomorphisum* φ デ 次ノ三條件ヲ滿スモノヲ考ヘル；即チ

φ_1 : $\varphi(X+Y)=\varphi(X)+\varphi(Y)$

φ_2 : $\varphi(0)=0$

φ_3 : $\varphi(\varphi(X))\subset\varphi(X)$

スルト容易ニ解ル如ク φ_1 ヨリ

φ_4 : $X\subset Y$ ナラバ $\varphi(X)\subset\varphi(Y)$

φ_4 ヨリ φ_5: $\varphi(X\cdot Y)\subset\varphi(X)\cdot\varphi(Y)$

ガ得ラレル。次ニ順序数 α ニ対シテ $\varphi^{(\alpha)}(X)$ ヲ超限帰納法ニヨリ次ノヤウニ規定スル.

i) $\varphi^{(0)}(X)=X$

ii) α ガ孤立数ナラバ $\varphi^{(\alpha)}(X)=\varphi(\varphi^{(\alpha-1)}(X))$

iii) α ガ極限数ナラバ $\varphi^{(\alpha)}(X)=\prod_{\beta<\alpha}\varphi^{(\beta)}(X)$

スルト明ラカニ $\alpha<\beta$ ナラバ $\varphi^{(\alpha)}(X)\supset\varphi^{(\beta)}(X)$

且ツ $\varphi^{(\alpha+\beta)}(X)=\varphi^{(\beta)}(\varphi^{(\alpha)}(X))$ デアル。

サテ簡単ノタメ $\varphi^{(\alpha)}(X)=X^{(\alpha)}$ ト置キ $X^{(1)}=X^{d}$ ト置ケバ 孤立数ニ対シテハ $X^{(\alpha)}=(X^{(\alpha-1)})^{d}$ デアル。$X^{(\alpha)}$ ヲ X ノ α 次ノ *dérivé* ト呼ブコトニシ，特ニ一次ノ *dérivé* X^{d} ヲ単ニ X ノ *dérivé* ト呼ブコトニシヨウ。

次ニ $\nabla\in\mathcal{L}$ ニ対シテ

α) $X\subset\nabla \rightleftarrows X=0(\nabla)$

β) $X\cdot Y^{c}=0(\nabla)\rightleftarrows X\subset Y(\nabla)$

γ) $X\subset Y(\nabla)$ 且ツ $Y\subset X(\nabla)\rightleftarrows X=Y(\nabla)$

ト定義スレバ容易ニ解ル如ク

Lemme 1. $X\subset Y(\nabla)$ ナラバ $X^{d}\subset Y^{d}(\nabla^{d})$. 及ビ $X\subset Y(\nabla^{a})$ ナラバ $X^{d}\subset Y^{d}(\nabla^{d})$ デアル。

(3)

サテ 1 ノ *adhérence* 即チ $1\cdot 1^{ac}=1^{ac}$ ヲ E ト置クコトニスレバ $E=X^{dc}\cdot X^{cdc}$ ガ任意ノ $X\in\mathcal{L}$ ニ対シテ成立スル.

スルト上ノ定義ヨリ直チニ

Lemme 2. $X^{ac}\subset X^{cd}(E)$ $X\in\mathcal{L}$

Lemme 3. i) $X^{dcd} \subset X^{cd}(E)$

ii) $X^{cdcd} \subset X^{d}(E^{d})$

何者, i) ハ $X^{dcd} \subset X^{cdd}(E^{d}) \subset X^{cd}(E^{d})$

ii) ハ i) ニ於テ X ノ代リニ X^{c} ト置ケバヨイ。

Lemme 2 ハ容易ニ次ノ如ク拡張サレル。

Lemme 2′ $X^{(\alpha)c} \subset X^{c(\alpha)}(E^{d})$ [5]

Lemme 4 $X^{dc} \subset X^{dcd}(E)$ 且ツ $X^{(\alpha)c} \subset X^{dc(\alpha)}(E^{d}) \subset X^{(\beta)c(\alpha)}(E^{d})$

証明ハ容易ナル故省略スル。

Lemme 5. $X^{(\alpha)c(\beta)} = X^{dc(\beta)}$

証明; $X^{(\alpha)c(\beta)} \subset X^{d(\alpha)c(\beta)} \subset X^{dc(\alpha+\beta)}(E^{d}) \subset X^{dc(\beta)}(E^{d})$

逆ノ不等号ハ $X^{(\alpha)} \subset X^{d} \rightarrow X^{(\alpha)c} \supset X^{dc} \rightarrow X^{(\alpha)c(\beta)} \supset X^{dc(\beta)}$

故ニ $X^{(\alpha)c(\beta)} = X^{dc(\beta)}(E^{d})$. 然ルニ $\beta = 1$ ノトキニハ

$E^{d} \subset X^{dcd}$ ダカラ $E^{d} \subset X^{(\alpha)cd}$ 故ニ $X^{(\alpha)cd} = X^{dcd}$ ガ成立スル. 依ッテ一般ノ β ニ対シテ然リ. *C.q.f.d*

Théorème 1. $X^{(\alpha)c(\gamma)c(\delta)c(\beta)} = X^{(\alpha)c(\beta)}$

証明; i) $X^{(\alpha)c(\gamma)c} \subset X^{(\alpha)cc(\gamma)}(E^{d}) = X^{(\alpha)(\gamma)}(E^{d}) \subset X^{(\alpha)}(E^{d})$

故ニ $X^{(\alpha)c(\gamma)c(\delta)c(\beta)} \supset X^{(\alpha)c(\beta)}(E^{d})$. (E^{d}) ハ Lemma 4 ノ証明ノ場合ト同様ニ省ク事ヲ得ル。

ii) $(X^{(\alpha)c(\gamma)})^{(\delta)c} \subset (X^{(\alpha)c(\gamma)})^{c(\delta)}(E^{d}) \rightarrow X^{(\alpha)c(\gamma)c(\delta)c} \subset$
$X^{(\alpha)c(\gamma)(\delta)cc}(E^{d}) = X^{(\alpha)c(\gamma)(\delta)}(E^{d}) \subset X^{(\alpha)c(\gamma)}(E^{d})$

依ッテ $X^{(\alpha)c(\gamma)c(\delta)c(\beta)} \subset X^{(\alpha)c(\gamma)(\beta)}(E^{d}) \subset X^{(\alpha)c(\beta)}(E^{d})$ 但シコノ (E^{d}) モ省クコトヲ得ル。 i) ト ii) トヨリ定理ヲ得ル。 *c, q, f, d*

サテコノ *Théorème* ニ於テ $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ ト置ケバ次ノ系ガ得ラレル。

Corollaire $X^{dcdcd} = X^{dcd}$

コレハ開核ニ関スル C. *Kuratowski* ノ等式[6] ノ導集合ニ於ケル *analogue* デアル。

Lemme 3. i) $X^{dcd} \subset X^{cd}\,(E)$

ii) $X^{cdcd} \subset X^{d}\,(E^{d})$

何者，i) ハ $X^{dcd} \subset X^{cdd}\,(E^{d}) \subset X^{cd}\,(E^{d})$

ii) ハ i) ニ於テ X ノ代リニ X^{c} ト置ケバヨイ。

Lemme 2 ハ容易ニ次ノ如ク拡張サレル。

Lemme 2′ $X^{(\alpha)c} \subset X^{c(\alpha)}\,(E^{d})$ (5)

Lemme 4 $X^{dc} \subset X^{dcd}\,(E)$ 且ツ $X^{(\alpha)c} \subset X^{dc(\alpha)}(E^{d}) \subset X^{(\beta)c(\alpha)}\,(E^{d})$

証明ハ容易ナル故省略スル。

Lemme 5. $X^{(\alpha)c(\beta)} = X^{dc(\beta)}$

証明； $X^{(\alpha)c(\beta)} \subset X^{d(\alpha)c(\beta)} \subset X^{dc(\alpha+\beta)}(E^{d}) \subset X^{dc(\beta)}(E^{d})$

逆ノ不等号ハ $X^{(\alpha)} \subset X^{d} \rightarrow X^{(\alpha)c} \supset X^{dc} \rightarrow X^{(\alpha)c(\beta)} \supset X^{dc(\beta)}$

故ニ $X^{(\alpha)c(\beta)} = X^{dc(\beta)}\,(E^{d})$． 然ルニ $\beta = 1$ ノトキニハ

$E^{d} \subset X^{dcd}$ ダカラ $E^{d} \subset X^{(\alpha)cd}$ 故ニ $X^{(\alpha)cd} = X^{dcd}$ ガ成立スル．依ッテ一般ノ β ニ対シテ然リ．C. *q. f. d*

Théorème 1. $X^{(\alpha)c(\gamma)c(\delta)c(\beta)} = X^{(\alpha)c(\beta)}$

証明； i) $X^{(\alpha)c(\gamma)c} \subset X^{(\alpha)cc(\gamma)}(E^{d}) = X^{(\alpha)(\gamma)}(E^{d}) \subset X^{(d)}(E^{d})$

故ニ $X^{(\alpha)c(\gamma)c(\delta)c(\beta)} \supset X^{(\alpha)c(\beta)}\,(E^{d})$． (E^{d}) ハ *Lemma* 4 ノ証明ノ場合ト同様ニ省ク事ヲ得ル。

ii) $(X^{(\alpha)c(\gamma)})^{(\delta)c} \subset (X^{(\alpha)c(\gamma)})^{c(\delta)}(E^{d}) \rightarrow X^{(\alpha)c(\gamma)c(\delta)c} \subset X^{(\alpha)c(\gamma)(\delta)cc}\,(E^{d}) = X^{(\alpha)c(\gamma)(\delta)}\,(E^{d}) \subset X^{(\alpha)c(\gamma)}\,(E^{d})$

依ッテ $X^{(\alpha)c(\gamma)c(\delta)c(\beta)} \subset X^{(\alpha)c(\gamma)(\beta)}(E^{d}) \subset X^{(\alpha)c(\beta)}(E^{d})$ 但シコノ (E^{d}) モ省クコトヲ得ル。i) ト ii) トヨリ定理ヲ得ル．*c, q, f, d*

サテコノ *Théorème* ニ於テ $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ ト置ケバ次ノ系ガ得ラレル。

Corollaire $X^{dcdcd} = X^{dcd}$

コレハ閉鎖ニ関スル C. *Kuratowski* ノ等式(6)ノ導集合ニ於ケル *analogue* デアル。

サテ　$X + X^d = X^a$　ト置キ X^a ヲ X ノ開放ト呼ブコトニスル：
明ラカニ *opération* X^a ハ (2) ニ於ケル φ ノ條件ヲ満足スルノミナラズ

Lemme 6.　$X^{aa} = X^a$　且ツ　$X^{da} = X^{ad} = X^d$

$X \subset X^a,\ X^d \subset X^a$ ヨリ明ラカ。次ニ a ト d トノ關係トシテハ

Théorème 2.　$X^{dcd} = X^{dca}(E^a) = X^{acd}(E^a) = X^{aca}(E^a)$

証明；　　先ヅ　$X^{dca} = X^{dc} + X^{dcd} = X^{dcd}(E) \cdots\cdots *)$

次ニ　$X^{dcd} \subset X^{cd}(E^d) \subset X^{ca}(E^d)$　$\overset{(\text{Lemma } 4)}{\text{依ッテ}}$ $X^{aca} = (X^a)^{dcd} \subset$
$\subset X^{acd}(E^d) \subset X^{aca}(E^d)$　又他方ニテ　$X^{aca} = (X^c X^{dc})^a \subset$
$X^{dca} \underset{(*)}{=} X^{dcd}(E)$.　故ニ $X^{dcd} = X^{dca}(E^a) = X^{acd}(E^a) =$
$X^{aca}(E^a)$

c. q. f. d.

Corollaire

$$X^{dcdcd} = \left\{\begin{matrix} X^{acdcd} \\ X^{dcacd} \\ X^{acdca} \end{matrix}\right\}(E^a) = \left\{\begin{matrix} X^{dcaca} \\ X^{acdca} \\ X^{acacd} \end{matrix}\right\}(E^a) = X^{acaca}(E^a)$$

次ニ σ_n ナルモノヲ定義シ、ソレハ d ヨリ始マリ c 及ビ d ガ交互ニ現ハレル有限列デアッテ、ソノ文字ノ総数ガ n ナルモノトスル。例ヘバ、$\sigma_{2n} = dcdc\cdots\cdots dc$ (dc ガ n 個)，$\sigma_{2n+1} = dcdc\cdots\cdots dcd$ (dc ガ n 個トソノ後ニ d ガ 1個)。又 σ_n ニ於テ d ノ代リニ a デ置換ヘタモノヲ ρ_n ト書ク事ニスル。

Théorème 3.　$n \geqq 3$　ナルトキ

i)　若シ n ガ奇数ナラバ　$X^{\sigma_n} + E \cdot X^{\rho_n} = X^{\rho_n} + E^d$

ii)　若シ n ガ偶数ナラバ　$X^{\sigma_n} + E^d \cdot X^{\rho_n} = X^{\rho_n} + E$

証明；　先ヅ Théorème 2 ノ系ヨリ一般ニ $X^{\sigma_n} = X^{\rho_n}(E^a)$ ガ成立シテヰル。若シ $n \geqq 3$ ガ奇数ナラバ $X^{\sigma_n} = (X^{\sigma(n-3)})^{dcd}$ ト書ケルカラ $E^d \subset X^{\sigma_n}$　且ツ $E \cdot X^{\sigma_n} = 0$。依ッテ i) ノ等式ガ得ラレタ。

又 n ガ偶数ナラバ (但シ $n \geqq 3$)，$E^d \cdot X^{\sigma_n} = 0$，且ツ $E \subset X^{\sigma_n}$

デアル。故ニ ii) ヲ得ル。 C. q. f. d.

Théorème 4. 若シ $n=4r+1$ 又ハ $n=4r$ ナラバ $X^{c(\beta)c}\subset X^{\sigma_n}(E^a)\subset X^{(\gamma)}(E^a)$ ガ成立スル。但シ β,γ ハ任意ノ有限ナル順序数。

Corollaire $X^{cdc}\subset X^{\sigma_n}(E^a)\subset X^{d}(E^a)$。但シ $n=4r+1$ 又ハ $n=4r$ デアル。

次ニ C. Kuratowski ノ得タ Table (T)[7] ニ相當スルモノトシ次ノ二ツノ Table ヲ掲ゲル。

【Table 1】:

$$X^{cdc}\subset X^{cdcdcdc}(E^a)\begin{array}{l}\diagup\subset X^{dcdc}(E^a)\diagdown\\ \diagdown\subset X^{cdcd}(E^a)\diagup\end{array}\subset X^{dcdcd}(E^a)\subset X^{d}(E^a)$$

【Table 2】

$$X^{dc}\subset X^{dcdcdc}(E^a)\begin{array}{l}\diagup\subset X^{cdcdc}(E^a)\diagdown\\ \diagdown\subset X^{dcd}(E^a)\diagup\end{array}\subset X^{cdcdcd}(E^a)\subset X^{cd}(E^a)$$

Table 2 ハ (3) ニ於ケル Lemma 2 ヲ詳細ニシタモノデアル。サテ之等ヲ証明シヨウ。

証明; 定理4ニ依ル $X^{dcdcd}\subset X^{d}(E^a)$ ダカラ $(X^c)^{dc}\subset(X^c)^{dcdcdc}(E^a)$。 次ニ $X^{cdcdcdc}\subset X^{cdcdccd}(E)=X^{cdcd}(E)=X^{cdcd}(E)$ 即チ $X^{cdc}\subset X^{cdcdcdc}(E^a)\subset X^{cdcd}(E^a)\subset X^{dcdcd}(E^a)\subset X^{d}(E^a)$ ガ得ラレタ。又 $(X^{cdc})^{dcdc}\subset(X^{d})^{dcdc}(E^a)\subset X^{dcdc}(E^a)$ 及ビ Lemme 2 ニヨリ $(X^{dc})^{dc}\subset(X^{dc})^{dcd}(E^a)$. 即チ $X^{cdcdcdc}\subset X^{dcdc}(E^a)\subset X^{dcdcd}(E^a)$ ガ得ラレル。コレデ Table I ハ完成シタ。ソコデ X ヲ X^c デ置換ヘルト Table 2 ガ得ラレル。 C. q. f. d.

(未完)

〔註〕

(1) C. Kuratowski; *Sur l'opération $\bar{A}$ de l'Analys Situs*, Fund. Math. 3 (1922)

C. Kuratowski ; Topologie I. (1933)

(2) H. Terasaka ; Die theorie der Topologischen Verbände, Fund. Math. (1939)

(3) H. Terasaka ; loc. cit.

(4) 後述ノハズ, タトヘバ

H. Hahn ; Reelle Funktionen, (1932)

(5) コノ章ヲ通ジテ $\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots$ ハ任意ノ順序数.

(6) C. Kuratowski ; loc. cit.

(7) C. Kuratowski ; loc. cit.

1947. 3. 16.