40. 位相群の構造に就いて I

近藤基吉

一般の位相群の構造を作用素環論の立場から論じて見度いと思ふ。此處で，先づ問題となる事は位相群Gの作用素に依る表現である。これを考へるために，Gの上の有界複素連續函數の全体からなる集合をC_Gとする。C_Gの要素fに対してノルム$|f|$を

$$|f| = \underset{x \in G}{\mathrm{u.b.}} \; |f(x)|$$

で定義する・すると，
C_Gは複素Banach空間である。

aをGの任意の要素とする時に，C_Gの上の作用素T_aを

$$T_a f(x) = f(ax)$$

で定義する。すると，T_aは有界線状であつて，しかも，$|T_a| = 1$である。

又，$T_a T_b f(x) = T_a f(bx) = f(abx) = T_{ab} f(x)$より$T_a T_b = T_{ab}$が得られ，$T_a = T_b$の時には，$T_a f(x) = T_b f(x)$から，$f(ax) = f(bx)$となる。特に，$x = e$（$e$はGの單位要素）とすれば，$f(a) = f(b)$となる。ところで，$a \neq b$であれば，$C_G$の要素$h$を求めて，$h(a) \neq h(b)$の成立する樣に出來る。これを證明するために，次の補助定理を與へる。

補助定理 aをGの要素とし，$V(a)$をaの任意の近傍とする時には，Gの上の有界連續函數$f(x)$を求めて，$f(a) = 0$，$x \bar{\in} V(a)$の時に，$f(x) = 1$である樣に出來る。

此補助定理に依つて$a \neq b$の時には，C_Gの要素hを求めて，$h(a) \neq h(e)$の成立する樣に出來る。これは$T_a = T_b$に矛盾する。夫故に，$a = b$である。從つて，$T_x \, (x \in G)$の集合を$\mathfrak{V}_G$とすれば これはGと代數的に同型である。

此處で，補助定理を證明して置かう。先づ，$a = e$が成立するとする。今，Gの部分集合$W(2^n)$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$を次の樣に定める。

(1) $\overline{W}(2^{-n})$ は V に含まれる e の近傍である

(2) $\{\overline{W}(2^{-n})\}^2 \leqq \overline{W}(2^{-n+1})$ $(n>1)$， $\{\overline{W}(2^{-1})\} \leqq V$

次に，$r=\sum_{k=1}^{n} 2^{-\lambda_k}$ $(\lambda_1<\lambda_2<\cdots\cdots<\lambda_n$; λ_k は自然数）に対して $\overline{W}(r)=\overline{W}(2^{-\lambda_1})\,\overline{W}(2^{-\lambda_2})\cdots\cdots\overline{W}(2^{-\lambda_n})$

と置く．すると，$r<s$ の時に $\overline{W}(r) \leqq \overline{W}(s)$ である．何となれば，$r=\sum_{k=1}^{n} 2^{-\lambda_k}$，$s=\sum_{k=1}^{n} 2^{-\mu_k}$，$\lambda_k=\mu_k$ $(k=1,2,\cdots,j)$

$\lambda_{j+1}>\mu_{j+1}$ とする時に

$$\overline{W}(r)=\overline{W}(2^{-\lambda_1})\,\overline{W}(2^{-\lambda_2})\cdots\cdots\overline{W}(2^{-\lambda_j})\,\overline{W}(2^{-\lambda_{j+1}})\cdots\cdots\overline{W}(2^{-\lambda_n})$$
$$\leqq \overline{W}(2^{-\mu_1})\,\overline{W}(2^{-\mu_2})\cdots\cdots\overline{W}(2^{-\mu_j})\,\overline{W}(2^{-\lambda_{j+1}})\,\overline{W}(2^{-\lambda_{j+1}-1})\cdots\cdots$$
$$\overline{W}(2^{-\lambda_{j+1}-n-j+1})$$
$$\leqq \overline{W}(2^{-\mu_1})\,\overline{W}(2^{-\mu_2})\cdots\cdots\overline{W}(2^{-\mu_j})\,\overline{W}(2^{-\mu_{j+1}}) \leqq \overline{W}(s)$$

となるからである．

今，G の上の函数 $g(x)$ を次の様に定める．即ち，$x \in \overline{W}(2^{-n})$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ の時には，$g(x)=0$ と置き，$x \in \overline{W}(r)$ を満す有理数 r の存在する時には，此様な r の上端を $g(x)$ とする．すると，$0 \leqq g(x) \leqq 1$ が得られ，$g(e)=0$ で，しかも $x \in G-V(e)$ の時には $g(x)=1$ である．ところで，$g(x)$ は又 G に於いて連続である．何となれば，x_0 を G の任意の要素とする時に x_0 に於けるる $g(x)$ の上端及び下端を夫々 M，m とする．すると，$m \leqq g(x_0) \leqq M$ であるが，正数 ε に対して $g(x_0)<r<g(x_0)+\varepsilon$ を満す有理数 r を取れば，$x_0 \in \overline{W}(r)$ が成立ち，$\overline{W}(r)$ は開集合である．又，$r<m$ を満す様な $\overline{W}(r)$ の和を V とすれば，V は開集合であって，しかも，x_0 は V の境界に属する．従って，$V\,\overline{W}(2^{-n})$ は常に x_0 を含む．故に，V の要素 x を求めて $x_0 \in x\,\overline{W}(2^{-n})$ の成立する様に出来る．ところで，$x \in \overline{W}(r)$，$r=\sum_{k=1}^{m} 2^{-\lambda_k}$ $\lambda_k>n$ $(k>j)$ とすれば

$$r+2^{-n}<\sum_{k=1}^{j} 2^{-\lambda_k}+2^{-n}+2^{-n}<r+2^{-n+1}$$

より

$$x_0 \in \overline{W}(r)\,\overline{W}(2^{-n}) \leqq \overline{W}\left(\sum_{k=1}^{j} 2^{-\lambda_k}\right)\overline{W}(2^{-k})\,\overline{W}(2^{-n})$$
$$\leqq \overline{W}\left(\sum_{k=1}^{j} 2^{-\lambda_k}+2^{-n}\right)\overline{W}(2^{-n}) \leqq \overline{W}\left(\sum_{k=1}^{j} 2^{-\lambda_k}+2^{-n+1}\right)$$

が得られ．$m \leqq g(x_0) \leqq r + 2^{-n+1} \leqq m + 2^{-n+1}$．即ち．$0 \leqq g(x_0) - m \leqq 2^{-n+1}$ である．n は任意の自然数であるから．$g(x_0) = m$ となり．$M = m$ である．夫故に．$g(x)$ は x_0 に於いて連結であつて．従つて．これは又 G に於いて連結である。即ち．$g(x)$ は与へられた條件を満す．

次に．$a \neq e$ の時を考へる．e の近傍 $V(e)$ を求めて $aV(e)$．$\leqq V(a)$ の成立する様にする．其処で．G の上の連結函数 $g(x)$ を求めて．$0 \leqq g(x) \leqq 1$，$g(e)=0$，$x \in G - V(e)$ の時には．$g(x) = 1$ である様に出来る．今．$f(x) = g(a^{-1}x)$ とすれば $f(a) = g(a^{-1}a) = g(e) = 0$ であつて．$x \in V(a)$ の時には．$a^{-1}x \in V(e)$ であるから．$1 = g(a^{-1}x) = f(x)$ となる．故に $f(x)$ は与へられた條件を満し．補助定理の證明は完了する．

今 V_G の位相を定義するために C_G の上の $\boxed{\text{全作用素環}}$ R_G — C_G の上の有界線状作用素の全体からなる環 — を取り．R_G に次の様な位相を与へる．R_G の任意の要素 A と C_G の要素 f_K $(K=1,2,\cdots,n)$ と G の要素 x_K $(K=1,2,\cdots,n)$ と正数 ε とに対して．

$$|(A - X)f_K(x_K)| < \varepsilon \quad (K=1,2,\cdots,n)$$

を満す R_G の要素 X の集合を $\mathcal{U}(A; f_1, f_2, \cdots, f_n : x_1, x_2, \cdots\cdots x_n : \varepsilon)$ で示し．A の $\boxed{\text{準弱近傍}}$ と名付ける．R_G は此近傍系に関して位相空間を作るが．これを R_G の $\boxed{\text{準弱位相}}$ と名付ける．

ところで．此位相に関して U_G は G と位相同型である．何となれば G の要素 g に U_G の要素 T_g を対応せしめる代数的同型寫像 φ を取り．G の要素 g_0 と T_{g_0} の準弱近傍 $\mathcal{U}(T_{g_0}; f_1 . f_2, \cdots . f_n; x_1 . x_2, x_n ; \varepsilon)$ とを与へる．今 $|(T_{g_0} - T_g) f_K(x_K)| < \varepsilon$．即ち．$|f_K(g_0 x_K) - f_K(g x_K)| < \varepsilon$ を満す $g x_K$ の集合を U_K とすれば．これは G の開部分集合であつて．$g_0 x_K \in U_K$ $(K=1,2,\cdots\cdots,n)$ である．これより．$g_0 \in U_K x_K^{-1}$ が得られ．従つて．$V(g_0) \leqq U_K x_K^{-1}$ $(K=1,2,\cdots\cdots,n)$ を満す g_0 の近傍 $V(g_0)$ が存在する．g を $V(g_0)$ の要素とすれば $g x_K \in U_K$ $(K=1.2,\cdots\cdots,n)$ が得られ

$|(T_{g_0}-T_g)f_K(x_K)|<\varepsilon$ $(K=1,2,\cdots,n)$ である．夫故に，g は $\mathcal{U}(T_{g_0};f_1,f_2,\cdots,f_n;x_1,x_2,\cdots,x_n:2)$ に属し．従って．φ は g_0 に於いて連続である．これより φ の連続性が得られる．

次に．T_{g_0} を $\mathfrak{U}_G$ の任意の要素とし $\mathfrak{U}$ を g_0 の任意の近傍とする時に．e の近傍 $\mathfrak{V}$ を求めて $\mathfrak{V}g_0\leqq\mathfrak{U}$ の成立する様に出来る．ところで．補助定理に依つて C_G の要素 f を求めて $f(e)=0$，$g\in G-\mathfrak{V}$ の時に．$f(g)=1$ の成立する様に出来る．今．T_{g_0} の準弱近傍 $\mathcal{U}(T_{g_0};f;g_0^{-1};1)$ を取り．此近傍に属する任意の要素 T_g を取る すると $|(T_{g_0}-T_g)f(g_0^{-1})|<1$ であるから．$|(f(e)-f(gg_0^{-1})|<1$ が得られ．$|f(gg_0^{-1})|<1$ である．夫故に $gg_0^{-1}\in\mathfrak{V}$ が得られ．$g\in\mathfrak{V}g_0\leqq\mathfrak{U}$ である．従つて φ^{-1} は T_{g_0} に於いて連続であつて これより φ^{-1} の連続性が得られる

夫故に．φ は G を $\mathfrak{U}_G$ に移す位相同型写像である．従つて．以上の結果を綜合して次の定理が得られる．

定理 1 G を位相群とし．C_G を G の上の有界連続函数からなる *Banach* 空間とする時には C_G の上の有界線状作用素 $T_g(g\in G)$ の集合 $\mathfrak{U}_G$ は 準弱位相に関して G と位相同型である．

此定理より直に次の系が得られる

系 G を緊密位相群とし．C_G を G の上の連続函数からなる Banach 空間とする時には C_G の上の有界線状作用素 $T_g(g\in G)$ の集合 $\mathfrak{U}_G$ は弱位相に関して G と位相同型である．

1947.3.16