

39. 全微分方程式ノ積分ニ就テ (II)

(広島文理大) 占部 賢

§6. 几个ノ変数ノ場合ヘノ擴張

以下ニ於テハ *suffiz*ニ限シ *Tensor*ノ記法ヲ用フ。

3個ノ変数ニ就テ今マデ行ツテ來タ議論ハ変数ガ几个アル場合ニ容易ニ擴張出來ル。本節ニ於テハ几个ノ変数 x^1, x^2, \dots, x^n ヲ有スル全微分方程式ノ積分ヲ論ズル。即チ次ノ全微分方程式ヲ考ヘル。

$$\Omega \equiv \sum x_i dx^i \quad (6.1)$$

今 $\Omega = 0$ ガ *integrable* デアルトシ、其任意ノ *integral* ヲ $\varphi(x) = \text{const.}$ トスル。(1) $\varphi(x)$ ニ對應スル *integrating factor* ヲ入トスル。

$$\text{即チ } \lambda x_i = \frac{d\varphi}{dx^i} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (6.2)$$

(x^1, x^2, \dots, x^n) ヲ座標トスル n 次元空間ヲ考ヘルト $\varphi(x) = \text{const.}$ ハ一ツノ *hypersurface* S ヲアラハス。即チ $\Omega = 0$ ノ *integral hypersurface* デアル。 S 上ニ任意ニ一点 $P_0(x_0^i)$ ヲ取り、 P_0 ヲ通ル *surface* F_1 ヲ考ヘ、(2) S ト F_1 トノ交線ヲ C_1 トスル。 C_1 上ニ任意ニ他ニ一点 $P_1(x_1^i)$ ヲ取ル。次キニ P_1 ヲ通ル *surface* F_2 ヲ考ヘ F_2 ト S トノ交線 C_2 上ニ他ニ任意ニ一点 $P_2(x_2^i)$ ヲ取ル。順次是ヲツバケ点 $P_{n-1}(x_{n-1}^i)$ ニ至ル。 *surface* F_p ($p=1, 2, \dots, n-1$)ノ方程式ハ $(n-2)$ 個ノ互ニ独立ナ方程式ノ組ガアタヘラレル。即チ F_p ノ方程式ヲ次ノモノトスル。

$$F_p: \hat{x}_\lambda^i = \hat{q}_p^i \quad (\hat{q}_p^i = \text{const.}) \quad (\lambda=2, 3, \dots, n-1) \quad (6.3)$$

カヤウニシタトキ曲線 C_p ノ方程式ハ次式ヲ積分シテ得ラレル。

$$\left. \begin{aligned} \Omega \equiv \sum x_i dx^i = 0 \\ d\hat{x}_\lambda^i = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

(6.4)ノ *integral* ノ一ツヲ $f_p(x, \hat{q}_p^i) = \text{const.}$ トスル。然ルトキ曲線 C_p ハ点 P_{p-1}, P_p ヲ通ル故次ノ関係式ガ成立スル。

$$\left. \begin{aligned} f_p(x_{p-1}^i, \hat{q}_p^i) &= f_p(x_p^i, \hat{q}_p^i) \\ \hat{x}_\lambda^i(x_{p-1}^i) &= \hat{q}_p^i = \hat{x}_\lambda^i(x_p^i) \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

買寄ヨリ $\hat{q}_p^i, x_1^i, \dots, x_{n-2}^i$ ヲ消去スル。方程式ノ数ハ

$$2(n-1)(n-2) + (n-1) = 2n^2 - 5n + 3.$$

消去スベキ文字ノ数ハ

(1) 以下選出ヲ生ズル種レノナイ限リ $\varphi(x^1, x^2, \dots, x^n)$ ヲ $\varphi(x)$ ト表記スル。

(2) 2 次元部分空間ヲ *surface*トイフ。

$$(n-1)(n-2) + n(n-2) = 2n^2 - 5n + 2.$$

依テ一般ニハ消去式ガーツ得ラレル。ソレヲ重 $(\underline{x}, \underline{x}_{n-1}) = 0$ トスル。然ルトキ変数ガ3個ノ場合ニ於ケルト同様ニ $\Omega = 0$ ガintegrableナルトキハ \underline{x}_p カ一定ノ条件ヲ満足シ。fヲ適当ニ選ヅル時ハ消去式ガ必ズーツ得ラレ。其ハ $\Omega = 0$ ノ任意ノintegral, $\varphi(\underline{x})$ ヲ用ヒテ常ニ $\varphi(\underline{x}) = \varphi(\underline{x}_{n-1})$ ノ形ニ帰着セシメ俾ルコトヲ証明スルコトガ出来ル。カウシテ此方法ニヨリ $\varphi(\underline{x}) = \text{const.}$ ナルintegralガ求メラレルコトニナル。

先ツ \underline{x}_p ノ満足スベキ条件ニ就テ考ヘル。

$$D_p \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \frac{\partial \underline{x}_p}{\partial x^1} & \frac{\partial \underline{x}_p}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial \underline{x}_p}{\partial x^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \underline{x}_p}{\partial x^1} & \frac{\partial \underline{x}_p}{\partial x^2} & \dots & \frac{\partial \underline{x}_p}{\partial x^n} \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

トオク。或ル p ニ対シテ $\rho(D_p) < n-1$ デアツタトスル。(1) $\underline{x}_p^1, \underline{x}_p^2, \dots, \underline{x}_p^{n-1}$ ハ互ニ独立デアルカラ此等ノ \underline{x}_p^i ニ関スル Jacobian matrix カヲ作ツタ $(n-2)$ 次ノ行列式ノ中ニハ0デアイモノガ少クとも一ツ存在スル。

今例ヘバ $\frac{\alpha(\underline{x}_p^1, \underline{x}_p^2, \dots, \underline{x}_p^{n-1})}{\alpha(x^1, x^2, \dots, x^{n-1})} \neq 0$ トスル。然ルトキ x^1, x^2, \dots, x^{n-1} ハ互ニ独立トナル。依テ変数 x^i カラ変数 x^1, x^2, \dots, x^{n-1} ニ交換カ可能トナル。然ルトキ

$$\Omega \equiv X_\lambda dx^\lambda = Y_\lambda d\underline{x}_p^\lambda + Y_1 dx^1 + Y_n dx^n. \quad (6.7)$$

此處デ Y_λ, Y_1, Y_n ハ $x^1, x^2, \underline{x}_p^1, \dots, \underline{x}_p^{n-1}$ ノ函数デアル。然ルトキ(6.7)ノ両辺ヲ比較シテ次式ヲ得ル。

$$\left. \begin{aligned} Y_\lambda \frac{\partial \underline{x}_p^\lambda}{\partial x^\mu} - X_\mu &= 0 & (i) \\ Y_\lambda \frac{\partial \underline{x}_p^\lambda}{\partial x^1} + Y_1 &= X_1 & (ii) \\ Y_\lambda \frac{\partial \underline{x}_p^\lambda}{\partial x^n} + Y_n &= X_n & (iii) \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

(1) 一般ニ matrix A ガアルトキ。ソノ rank ヲ $\rho(A)$ デアラス。

サテ $\rho(D_p) < n-1$ 且ツ $\sum_{p=1}^i \dots \sum_{p=1}^{n-1}$ ハ直ニ独立デアルカラ次式ヲ満足スル ϵ_λ ガ存在スル。 $X_i = \epsilon_\lambda \frac{\partial X_i}{\partial X_p}$ (6.9)

是ヲ (6.8) (i)ニ代入スレバ

$$(Y_\lambda - \epsilon_\lambda) \frac{\partial X_i}{\partial X_p} = 0.$$

然ルニ仮定ヨリ $\det. \left| \frac{\partial X_i}{\partial X_p} \right| \neq 0$. 依テ $Y_\lambda = \epsilon_\lambda$. 是ヲ (6.8) (ii) (iii)ニ

代入シ (6.9) ヲ用フレバ $Y_1 = Y_n = 0$. 故ニ Ω ハ次ノ如クナル。

$$\Omega = Y_\lambda dX_p \quad (6.10)$$

サテ $\Omega = 0$ ガ integrable ナラバ、ソノ integral ヲ $\psi(X) = \text{const.}$ 是ニ對應スル integrating factor ヲ入トスレバ (6.10) ヲリ次式ヲ得ル。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial X_p} &= \frac{\partial \psi}{\partial X_p} = \epsilon_\lambda \\ \lambda Y_\lambda &= \frac{\partial \psi}{\partial X_p} \end{aligned} \right\} \quad (6.11)$$

依テ ψ ハ X_p ノミノ函数トナリ。且ツ Y_λ ハ common factor ヲ檢ケバ X_p ノミノ函数トナル。依テ此時ハ $\Omega = 0$ ハ common factor ヲ全体ヲ除スレバ X_p ノミノ式トナリ。変数ノ数ハ $(n-2)$ 個トナル。然ルトキ此ノ $(n-2)$ 個ノ変数ノ $\Omega = 0 =$ 再ビ我々ノ方法ヲホドコセバ。此際選ダ X_p ($p=1, 2, \dots, n-3$; $\lambda=2, 3, \dots, n-3$) ニツキ スベテノ p ニ對シ $\rho(D_p) = n-3$ トナルカ或ハアル p ニツキテハ $\rho(D_p) < n-3$ トナルカデアル。 $\rho(D_p) < n-3$ ナル如キ p ガアル時ハ再ビ上ノ過程ヲ繰返ス。順次カヤウニスル時ハ、結局 $\Omega = 0$ ハアル幾ツカノ変数例ハバ m 個ノ変数ニ對シテ ($m \leq n-2$) 常ニ $\rho(D_p) = m-1$ トナルカ或ハ1個又ハ2個ノ変数ノ場合ニ帰着セシメラレル。而シテ変数が1個又ハ2個ノ場合ハ $\Omega = 0$ ハ直ニ積分サレ其 integral ハ直接求メラレル。依テ我々ハ m 個ノ変数ノモノニツキ、スベテノ p ニ對シ $\rho(D_p) = m-1$ ナル場合ヲ考慮スレバヨイコトニナル。

此立場ヨリ (6.16) ノ D_p ニ對シテハ スベテノ p ニ對シ $\rho(D_p) = n-1$ デアル場合ニツキ論ズレバ十分トナル。依テ我々ハ 以下ニ於テハ、スベテノ p ニ對シ $\rho(D_p) = n-1$ デアルトシテ議論ヲ進メテ行ク。

$\rho = (D_p) = n-1$ ナル時ハ (6.4) ハ *linearly independent* ナ $(n-1)$ 個ノ方程式カラ成リ 従ツテ曲線ヲアラハシ、 $(n-1)$ 個ノ独立解ヲ有スル。

サテ (6.4) ノ *integral* ノ一ツヲ選デ其ヲ f_p トシ、曲線 C_p ノ方程式ヲ $f_p = \text{const.}$, $\chi_p^2 = \text{const.}$ トスルノデアルカラ §2 デ考ヘタト同様ニ f_p ハ $\chi_p^2 = \text{const.}$ ノモノデナケレバナラヌ。サテ $\rho(D_p) = n-1$ デアルカラ (6.4) ハ $(n-1)$ 個ノ独立解ヲ有スル。 χ_p^2 ハ $(n-2)$ 個ノ独立解デアルカラ尚一箇此等ニ独立ナ解ガ存在スル。依テ我々ハカハル *integral* ヲ $f_p = \text{const.}$ トスル。

次ギニ次式ヲ定義サレル *matrix* Δ' ヲ考ヘル。

$$\Delta \equiv \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ -D_2 & D_2 & & \\ 0 & -D_3 & D_3 & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & -D_{n-2} & D_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & -D_{n-1} \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

結晶ノタメ $D_p = \| a_i^\kappa \|$ ($i=1, 2, \dots, n; \kappa=1, 2, \dots, n-1; \kappa$ ハ行、 i ハ列ヲアラハストスル) ト書ク。 $\rho(\Delta') \leq n(n-2)$ 。今若シ $\rho(\Delta') < n(n-2)$ ナリトスル。然ルトキハ次式ヲ満足スル愚クハ 0 ナラサル $Z_1^i, Z_2^i, \dots, Z_{n-2}^i$ ガ存在スル。

$$\begin{aligned} a_i^\kappa Z_1^i &= 0 \\ -a_i^\kappa Z_1^i + a_i^\kappa Z_2^i &= 0 \\ &\vdots \\ -a_{n-2}^\kappa Z_{n-2}^i + a_{n-2}^\kappa Z_{n-2}^i &= 0 \\ -a_{n-1}^\kappa Z_{n-2}^i &= 0 \end{aligned}$$

即ち

$$\left. \begin{aligned} Q_1^x Z_1^i &= 0 \\ Q_2^x (Z_2^i - Z_1^i) &= 0 \\ \dots \\ Q_{n-2}^x (Z_{n-2}^i - Z_{n-3}^i) &= 0 \\ -Q_{n-1}^x Z_{n-2}^i &= 0 \end{aligned} \right\} (6.13)$$

さて曲線 C_p は $Q_p^x A_p^i = 0$ ナル A_p^i ヲ用ヒテ次式ヲ積分シテ得ラレルモノデアアル。

$$\frac{dx'}{A_p^i} = \frac{dx}{A_p^i} = \dots = \frac{dx^n}{A_p^i} \quad (6.14)$$

さて $P(D_p) = n-1$ ナル故、 A_p^i ハ *common factor* ヲ除イテハ *single* ニ定マル。然ルトキ (6.13) ト比較シテ次式ヲ得ル。

$$Z_1^i = \lambda_1^i A_1^i, Z_2^i - Z_1^i = \lambda_2^i A_2^i, \dots, Z_{n-2}^i - Z_{n-3}^i = \lambda_{n-2}^i A_{n-2}^i, -Z_{n-2}^i = \lambda_{n-1}^i A_{n-1}^i \quad (6.15)$$

是等ヲ辺々加フレバ

$$\lambda A_p^i = 0 \quad (6.16)$$

此処デ $\lambda = \lambda^1 = \dots = \lambda^{n-1} = 0$ トスレバ (6.15) ヨリ $Z_1^i = Z_2^i = \dots = Z_{n-2}^i = 0$ ヲ得。然レモノ仮定ニ反スル。故 $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^{n-1}$ ノ中ニハ 0 デナイモノガ少クトモ一ツ存在スル。然ルトキ A_1^i, \dots, A_{n-1}^i ノ中ニ独立ナモノハ高々 $(n-2)$ 個デアアル。

今此等ノ中ニ独立ナモノガ m 個アルトスレバ $A_1^i W_1^i = A_2^i W_2^i = \dots = A_{n-1}^i W_{n-1}^i = 0$ ヲ満足スル W_r^i ノ中ニ独立ナモノハ $(n-m)$ 個トナル。ソレヲ W_r^i ($r=1, 2, \dots, n-m$) トスレバ $W_r^i dx^i = 0$ ヲ満足スル *integral equations* ノ数ヲ N トスレバ $N \geq n-m$ (1) 然ルニ $n-2 \geq m$, 故ニ $N \geq 2$. 而シテ $W_r^i dx^i = 0$ ヲ満足スル *integral equations* ノアラハス部分空間ハ曲線 C_1, C_2, \dots, C_{n-1} ノ群ガ決定スル部分空間デアアル。然ルトキ、ソノ部分空間ヲアラハス方程式ノ数ハ少クトモ 2 デアルカラ 高々

(1) Forney, Theory of Diff Eqs. I. p. 317

$(n-2)$ 次元デアル。依テ此時、点 P_0 ヲ固定シ、点 P_1, P_2, \dots, P_{n-2} ヲ
 夫々曲線 C_1, C_2, \dots, C_{n-2} 上ヲ變動セシメ、同時ニ夫レニ應ジテ曲線
 $C_2, \dots, C_{n-2}, C_{n-1}$ ヲ變動セシメタ時、点 P_{n-1} ノ軌跡ハ *hypersur-*
*face*トナラズ、高々 $(n-2)$ 次元空間トナル。換言セバ (6.5)ヨリ
 $\frac{\partial Q}{\partial x_1}, \frac{\partial Q}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial Q}{\partial x_{n-2}}$ ヲ消去スルトキ $\frac{\partial Q}{\partial x_0}$ ト $\frac{\partial Q}{\partial x_{n-1}}$ トノ間ニ少クトモ 2ツノ独立
 ナ關係式ヲ得ルコトニナル。サテ $\frac{\partial Q}{\partial x_0}, \frac{\partial Q}{\partial x_{n-1}}$ ハ共ニ *integral hyper-*
surface $\varphi(x) = \text{const.}$ 上ノ点ナルガ故ニ $\varphi(x_0) = \varphi(x_{n-1})$ ナル關係
 ヲ満足スル。然ルトキ (6.5)ヨリ消去ノ結果ハ上ノモノヲ含ムトシテ
 モ尚其以外ニ独立ノモノガ少クトモ一ツアル。依テ消去ノ結果得ラレ
 ル部分空間ハ *integral hypersurface*ト高々 $(n-2)$ 次元部分空間
 ヲ共有スル高々 $(n-2)$ 次元空間トナル。依テ消去ノ結果カヲハ
integral hypersurface 其ノモノハ求メラレナイコトニナル。
 カワテ (6.5)ヨリ消去スルコトニヨツテ *integral hypersurface*
 ガ求メ得ラレルタメニハ $\rho(\Delta') = n(n-2)$ デナケレバナラヌコトニ
 ナル。

サテ Δ ニ於テ D_1 ノ第一行、 D_2 ノ第一行、 \dots ノ D_{n-2} ノ第一行ノ和ヲ
 D_{n-1} ノ第一行ニ加ヘルト D_{n-1} ノ第一行、元素ハ全部 0トナル。依テ D_{n-1} ヨ
 リ其第一行ヲ除イテ得ル *matrix*ヲ D_{n-1}' デアラハシ次式ヲ定義サレ
 ル *square matrix*ノ行列式ヲ Δ デアラハセバ、

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix}
 D_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 -D_2 & D_2 & & & & \vdots \\
 0 & -D_3 & D_3 & & & \vdots \\
 \vdots & & & \ddots & & \vdots \\
 & & & & -D_{n-2} & D_{n-2} \\
 0 & \dots & \dots & & 0 & -D_{n-1}'
 \end{vmatrix} \quad (6.17)$$

$\rho(\Delta) = \rho(\Delta')$ ヨリ $\rho(\Delta') = n(n-2)$ トイフ條件ハ $\Delta \neq 0$ トイフ條件
 デオキカヘルコトが出来ル。

カクテ n 個ノ変数ノ場合ニ於テ *Reynold* ノ方法ガ可能ナルタメニ $\rho(D_p) < n-1$ ナル p ガ存在スル場合ヲ論ケバ、次ノ條件ガ必要ナル。

[條件 Δ]
$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ -D_2 & D_2 & & \vdots \\ 0 & -D_3 & D_3 & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & -D_{n-2} & D_{n-2} \\ & & & 0 & -D'_{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Delta = 0$ ナル時ニ於テモ $\rho(D_p) < n-1$ ナル p ガ存在スル場合ハ (6.6) ニ就テ論ジテ寫ヨリ変数ノ數ガ n ヨリホナル場合ニ帰着セシメラレ 或ハ直チニ積分可能トナリ、或ハ所尋ノ條件ヲ満足スル時ハ *Reynold* ノ方法ガ可能トナル。(假定スル如ク $\Delta \neq 0$ ナル條件ヲ満足スル時ハ *Reynold* ノ方法ガ可能トナリ、從ツテ $\rho(D_p) < n-1$ ナル時 $\Omega = 0$ ガ n 個ノ変数ニ對シテハ $\rho(D_p) = n-1$ ナル如ク帰着セシメラレ、其時ノ $\Delta \neq 0$ ナラバ是ニ對シテ *Reynold* ノ方法ガ可能トナル。)

條件 Δ ニツキ若干考察スル。

$\Delta \neq 0$ ナラバ $\rho(D_p) = n-1$ ($p = 1, 2, \dots, n-2$) 何トナレバ p ノ個ニ對應スル D_p ノ *rank* ガ $(n-1)$ ヨリホナラバ、ソノ D_p ノ行ニツイテ Δ ニ *Laplace* 展開ヲホドコセバ、 $\Delta = 0$ トナリ假定ニ反スル、又 Δ ニ於テ D_1 ノ第一行、 D_2 ノ第一行、 \dots 、 D_{n-3} ノ第一行ノ和ヲ D_{n-2} ノ第一行ニ加フレバ、 D_{n-2} ノ第一行ノ元素ハ D'_{n-1} ノ列ノ處ガ X_1, X_2, \dots, X_n 他ノ處ハ全部 0 トナル。依テ $\rho(D_{n-1}) < n-1$ ナラバ、此ノ交換サレタ行列式ニ於テ D_{n-2} ノ第一行、及び D'_{n-1} ノ行ニツイテ *Laplace* 展開ヲホドコセバ $\Delta = 0$ トナル、コレ又假定ニ反ス。故ニ $\rho(D_{n-1}) = n-1$ 、カクテ $\Delta \neq 0$ ナラバ $\rho(D_p) = n-1$ ($p = 1, 2, \dots, n-1$) トナル。

$\rho(D_p) = n-1$ ナル時 $\Delta = 0$, i. e. $\rho(\Delta') < n(n-2)$ ナラバ前ニ論ジタ如ク $Q_p^k A_p^i = 0$ ヲ満足スル A_p^i ハ (6.16) ニヨリ *linearly dependent* ニナル。即チ $A \equiv \|A_p^i\|$ トスレバ $\rho(A) < n-1$ コノ並モ容易ニ証明サレル。

即ち $\rho(D_p) = n-1$ ナル時 $\rho(A) < n-1$ ナラバ $\Delta = 0$, i. e. $\rho(\Delta') < n$ ($n-2$).

証明ハ次ノ通り.

$\rho(A) < n-1$ ナル故 $\lambda A^i = 0$ ヲ満足スル悉クハ 0 ナラザル λ ガ存在スル.

然ルトキ $\lambda A_1^i = Z_1^i, \lambda A_1^i + \lambda A_2^i = Z_2^i, \dots, \lambda A_1^i + \lambda A_2^i + \dots + \lambda A_{n-2}^i = Z_{n-2}^i$ トオケバ $\lambda A_1^i = 0$ ヨリ

又上式ヨリ,

$$\left. \begin{aligned} -Z_{n-2}^i &= \lambda A_{n-1}^i \\ Z_1^i &= \lambda A_1^i \\ Z_2^i - Z_1^i &= \lambda A_2^i \\ &\vdots \\ Z_{n-2}^i - Z_{n-3}^i &= \lambda A_{n-2}^i \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

ナテ $a_{i,p}^k A_p^i = 0$ ヨリ

$$\left. \begin{aligned} a_{i,p}^k Z_1^i &= 0 \\ a_{2,p}^k (Z_2^i - Z_1^i) &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n-2,p}^k (Z_{n-2}^i - Z_{n-3}^i) &= 0 \\ a_{n-1,p}^k Z_{n-2}^i &= 0 \end{aligned} \right\}$$

即ち (6.13)ガ成立スル. 而シテ $Z_1^i = \dots = Z_{n-2}^i = 0$ ナラバ (6.18)ヨリスベチノ λ ガ 0 トナル, コレ他ノ仮定ニ反スル. 故ニ Z_1^i, \dots, Z_{n-2}^i ノ中ニハ少クトモ一ツ 0 デナイモノガ存在スル. 然ルトキ $\rho(\Delta') < n(n-2)$. i. e. $\Delta = 0$ トナル.

カクテ $\Delta \neq 0$ ナラバ $\rho(D_p) = n-1$ ニシテ $\rho(A) \leq n-1$ ナル故. 若シ此時 $\rho(A) < n-1$ トスレバ上ノ議論ヨリ $\Delta = 0$ トナリ仮定ニ反ス. 故ニ $\rho(A) = n-1$. 逆ニ $\rho(D_p) = n-1$ ニシテ且ツ $\rho(A) = n-1$ ナラバ $\Delta \neq 0$. 何トナレバ $\Delta = 0$ ナラバ $\rho(D_p) = n-1$ ヨリ前ノ議論ニヨリ $\rho(A) < n-1$ トナリ此又仮定ニ反ス. カクテ條件 Δ ハ $\rho(D_p) = \rho(A) = n-1$ ト *equivalent*ニナル. 即チ條件 Δ ハ 次ノ條件 A デオキカヘルコトガ出キル

[条件 A] $P(D_p) = n-1$ 且ツ $P(A) = n-1$.

次ニ条件 Δ 又ハ A ハ *Reynold* ノ方法ガ可能ナルヲノ十分条件デアルコトヲ証明スル。以下ニ於テハ条件 Δ 若ハ条件 A ハ満足サレテモルトシテ議論ヲ進メル。

$\Omega = 0$ ハ *integrable* ナリトシ。其任意ノ *integral* ヲ $\varphi(x) = \text{const.}$ トスル。 $D_p = (6.2)$ ヲ代入スレバ条件 $A =$ 依リ $P(D_p) = n-1$ ナルコトカラ φ, \dot{X}_p ハ互ニ独立ナ $(n-1)$ 個ノ函数デアル。且ツ φ, \dot{X}_p ハ明ラカニ (6.4) ノ *integral* ヲアタハル。然ルトキ (6.4) ノ *integral* f_p ハ是等ノ函数デナケレバナラヌ。即チ

$$f_p = f_p(\varphi, \dot{X}_p) \quad (6.19)$$

同ニ f_p ハ $\dot{X}_p =$ 独立デアルカラ $\frac{\partial f_p}{\partial \dot{X}_p} = 0$ 。然ルトキ (6.5) ハ次ノ如クシキカハルコトガ出来ル。

$$\left. \begin{aligned} f_p(\varphi(x), \dot{X}_p(x)) &= f_p(\varphi(x), \dot{X}_p(x)) \\ \dot{X}_p(x) &= \dot{X}_p(x) \end{aligned} \right\} \quad (6.20)$$

然ルトキ我々ハ (6.20) ヲリ。 $X_1^i, X_2^i, \dots, X_{n-2}^i$ ヲ消去スレバヨイコトニナル。然ルニ $\frac{\partial f_p}{\partial \dot{X}_p} = 0$ ヲリ第二式ヲ利用シテ第一式ヨリ $\varphi(x) = \varphi(x)$ 。故ニ $X_1^i, X_2^i, \dots, X_{n-2}^i$ ヲ消去シテ $\varphi(x) = \varphi(x)$ ヲ得ル。

扱 (6.20) ノ右辺ヲ左辺ニ移項シ。

$$\left. \begin{aligned} f_p(\varphi(x), \dot{X}_p(x)) - f_p(\varphi(x), \dot{X}_p(x)) &= 0 \\ \dot{X}_p(x) - \dot{X}_p(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

左辺ノ式ノ $X_1^i, X_2^i, \dots, X_{n-2}^i$ ニ関スル *Jacobian matrix* ヲ J トスル。

$$J_p \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial f_p}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial X^1} + \frac{\partial f_p}{\partial \dot{X}_p} \frac{\partial \dot{X}_p}{\partial X^1}, & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial X^n} + \frac{\partial f_p}{\partial \dot{X}_p} \frac{\partial \dot{X}_p}{\partial X^n}, \\ \frac{\partial \dot{X}_p}{\partial X^1}, & \dots & \frac{\partial \dot{X}_p}{\partial X^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \dot{X}_p}{\partial X^1}, & \dots & \frac{\partial \dot{X}_p}{\partial X^n} \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

トキ $J_p =$ 於テ $X^i = X^i$ トセルモノヲ J_p デアラハセバ J ハ次ノ如クナル。

$$J = \begin{pmatrix} -\mathcal{J}_1 & 0 & \dots & 0 \\ \mathcal{J}_1 & \mathcal{J}_2 & & \\ 0 & \mathcal{J}_2 - \mathcal{J}_3 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & \mathcal{J}_{n-3} & -\mathcal{J}_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & \mathcal{J}_{n-2} \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

$J =$ 於テ $\chi_1^i = \chi_2^i = \dots = \chi_{n-2}^i = \chi^i$ トイタモノヲ J' デアラハス。
 然ルトキ若シ $\rho(J) < n(n-2)$ ナラバ $\rho(J') < n(n-2)$. 然ルニ (6.2)
 及ビ $\lambda \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial \lambda} \neq 0$ ヲ用フレバ $\rho(J') = \rho(\Delta) \therefore \rho(\Delta) < n(n-2)$.
 此レ條件 $\Delta =$ 反ス。故ニ $\rho(J) \leq n(n-2)$ ヨリ $\rho(J) = n(n-2)$. 而シ
 テ (6.21) ノ方程式ノ数ハ $(n-1) + (n-1)(n-2) = (n-1)^2 = n^2 - 2n + 1$
 依テ (6.21) ヨリ $\chi_1^i, \dots, \chi_{n-2}^i$ ヲ消去セル結果ハ消去式ハ高々一ツ
 デアル。然ルニ既ニ $\varphi(\chi_0) = \varphi(\chi_{n-1})$ ナル消去式ヲ得テアル。依テ消
 去式ハ *algebraic equivalence* ヲ除イテハ唯一ツデアリ。其
 レハ $\varphi(\chi_0) = \varphi(\chi_{n-1}) = \text{algebraically equivalent}$ デアル。カ
 クテ次ノ結果ガ得ラレタ。

χ ガ條件 Δ 若ハ A ヲ満足スル如ク選バレタ時、 f_p ヲ $\chi_p^i =$ 独立デア
 ル如ク取レバ、(6.20) ヨリ $\chi_1^i, \dots, \chi_{n-2}^i$ ヲ消去セル結果ハ——換
 言セバ (6.5) ヨリ $\chi_p^i, \chi_1^i, \dots, \chi_{n-2}^i$ ヲ消去セル結果ハ 消去式ガ唯
 一ツ必ず存在シ。其ハ $\varphi(\chi_0) = \varphi(\chi_{n-1}) = \text{algebraically equivalent}$
 ニナル。即チ $\Omega = 0$ ガ *integrable* ナル時、其任意ノ *integral*
 ヲ $\varphi(\chi) = \text{const.}$ トスレバ消去式ノ重 $(\chi_0, \chi_{n-1}) = 0$ ハ必ス
 $\varphi(\chi_0) = \varphi(\chi_{n-1}) =$ 等値セシメラレル。

カクテ條件 Δ 若ハ A ガ満足サレテ居ル時ハ、消去ニ於テ

$\Omega = 0$ ノ *integral* $\varphi(\chi) = \text{const}$ ガ得ラレタ。コノ條件 Δ 若ハ

AはRaymondノ方法ガ可能ナルヲメノ十分条件デモアルコトガ分ツヲ。

次に上ノ結果ノ逆ヲ考ヘル。即チ \hat{X}_p^λ ガ条件 Δ 若ハ Aヲ満足スル如ク變バレタ時、方程式ノ(6.4)ヲ作り、是ノ $\hat{X}_p^\lambda = \text{独立ナIntegral}$ f ヲ用ヒテ作ツタ(6.5)ヨリ $\hat{Q}_p, \hat{X}_1^i, \dots, \hat{X}_{n-2}^i$ ヲ消去セル結果ガ $\phi(\hat{X}) = \phi(\hat{X}_{n-1}^i)$ ノ形ニナツタスル。然ルトキハ $\Omega = 0$ ハ integrableトナリ、 $\phi(\hat{X}) = \text{const.}$ ガ其ノintegralトナル。トイフコトヲ証明スルコトガ出来ル。即チ次ノ如シ。

(6.5)ニ於テ $\hat{X}_{n-1}^i = \hat{X}_{n-2}^i$ トオイテモ勿論(6.5)ハ成立スル。故ニ消去セル結果ガ $\phi(\hat{X}) = \phi(\hat{X}_{n-1}^i)$ ナラバ $\phi(\hat{X}) = \phi(\hat{X}_{n-2}^i) = \phi(\hat{X}_{n-1}^i)$ ヲ得ル。同様ニシテ $\hat{X}_{n-1}^i = \hat{X}_{n-2}^i = \hat{X}_{n-3}^i \dots$ 等ト順次オイテモ(6.5)ハ成立スル故

$$\phi(\hat{X}) = \phi(\hat{X}_1^i) = \dots = \phi(\hat{X}_{n-2}^i) = \phi(\hat{X}_{n-1}^i) \quad (6.24)$$

サテ \hat{X}_p^λ ハ(6.4)ノアラハス曲線上ノ任意ノ点デアルカラ $\phi(\hat{X}_{n-1}^i) = \phi(\hat{X}_p^\lambda)$ ハ $\phi(\hat{X})$ ガソノ曲線上ニ於テ constantデアルコトヲ示シテ得ル。然ルトキ(6.24)ハ $\phi(\hat{X})$ ガ(6.4)ノアラハス空間ノ曲線上ニ於テ constantデアルコトヲ示ス。故ニ(6.4)ヲ満足スル任意ノ $d\hat{X}^i$ ニ対シテ $\frac{d\phi}{d\hat{X}^i} d\hat{X}^i = 0$ 。且ツ条件Aヨリ $\rho(\hat{D}_p) = n-1$ ナル故ニ或ヲ満足スル $\hat{\rho}, \hat{\rho}_\lambda$ ガ存在スル。

$$\frac{d\phi}{d\hat{X}^i} = \hat{\rho}^i \hat{X}_i + \hat{\rho}_\lambda \frac{d\hat{X}_p^\lambda}{d\hat{X}^i} \quad (\rho: \text{not summed}) \quad (6.25)$$

然ルトキ

$$\left. \begin{aligned} \hat{\rho}^i \hat{X}_i + \hat{\rho}_\lambda \frac{d\hat{X}_p^\lambda}{d\hat{X}^i} - \hat{\rho}^i \hat{X}_i - \hat{\rho}_\lambda \frac{d\hat{X}_p^\lambda}{d\hat{X}^i} &= 0 \\ \hat{\rho}^i \hat{X}_i + \hat{\rho}_\lambda \frac{d\hat{X}_p^\lambda}{d\hat{X}^i} - \hat{\rho}^i \hat{X}_i - \hat{\rho}_\lambda \frac{d\hat{X}_p^\lambda}{d\hat{X}^i} &= 0 \\ \vdots \\ \hat{\rho}^{n-2} \hat{X}_i + \hat{\rho}_\lambda \frac{d\hat{X}_p^\lambda}{d\hat{X}^i} - \hat{\rho}^{n-1} \hat{X}_i - \hat{\rho}_\lambda \frac{d\hat{X}_p^\lambda}{d\hat{X}^i} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.26)$$

根 $\dot{p}, \dot{p}'_{\lambda}, \dot{p}''_{\lambda}, \dots, \dot{p}^{(n-1)}_{\lambda}$ の係数ノ matrix ヲ作レバ丁度 $\Delta^* \neq 0$ トナル。(*ハ transposed matrix ヲアラス。) 條件 $\Delta \equiv 0$ 。

$$\therefore \rho(\Delta') = \rho(\Delta^*) = n(n-2).$$

サテ $\dot{p}, \dot{p}'_{\lambda}, \dots, \dot{p}^{(n-1)}_{\lambda}$ ノ数ハ $(n-1)^2 = n(n-2) + 1$. 故ニ (6.26) ヲ見テ $\rho = 0$ ナル linear homogeneous equations ト考ヘレバ

linearly independent ナ解ハ唯一ツ存在スル。然ルニ $\dot{p} = \dot{p}' = \dots = \dot{p}^{(n-1)} = 0$ ハ明カニ (6.26) ノ解デアリ。依テ (6.26) ノ一般解ハ $\dot{p} = \dot{p}' = \dots = \dot{p}^{(n-1)} = c p, p_{\lambda} = 0$. $c p$ ヲ入ト書ケバ (6.25) ハ次ノ如クナル。

$$\frac{d\phi}{dx^i} = \lambda X_i$$

即チ (6.2) ヲ得ル。故ニ $\Omega = 0$ ハ integrable トナリ、 $\phi(x) = \text{const.}$ 其ノ integral トナル。即チ逆ガ証明セリタ。

以上述べタ事ニヨリ *Reymond* ノ方法ハ変數ガ凡個ノ場合ニモ拡張サレルコトガ明カニナリ。消去式ノ分解ニ關スル定理モソノマ、成立スルコトガ分ツタ。

上道ノ場合ニハ F_p ノ方程式トシテ最モ一般ニ各々ガ $(n-2)$ 個ノ方程式ノ組カテ成ル場合ヲ取り扱ツタガ。特ニ F_p ガ次ノ如クアラハサレルニハ、條件 Δ ハ非常ニ簡單ニナル。即チ $(n-1)$ 個ノ互ニ独立ナ函数 X^k ($k=1, 2, \dots, n-1$) ヲ取り、 F_p ハ次式ヲ定義サレルトスル。

$$F_p: X^k = \bar{a}^k \quad (\bar{a}^k = \text{const.}) \quad (k=1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, n-1) \quad (6.27)$$

此時 Δ ヲ計算スレハ次ノ如クナル。

$$\Delta = \epsilon D^{n-2} \quad \epsilon = +1 \text{ 又 } -1 \quad \dots \dots \quad (6.28)$$

$$D = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ \frac{dX_1}{dx^1} & \frac{dX_2}{dx^2} & \dots & \frac{dX_n}{dx^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d^{n-1}X_1}{dx^1} & \frac{d^{n-1}X_2}{dx^2} & \dots & \frac{d^{n-1}X_n}{dx^n} \end{vmatrix}$$

故ニ條件 Δ ハ $D \neq 0$ デオキカヘルコトガ出來ル。

以上