37. Topological group の completion について。

（阪大） 吉澤 尚明

(1°) Topological group G が與へられたとする。この時單位元の近傍系 $\{V\}$ によつて G に structure $\{Vx\}$ 及び $\{xV\}$ が定義される。これを夫々 right-invariant structure 及び left-invariant structure といふことにする。更に この様な structure の1つに關するすべての Cauchy family が收斂する時に G をその structure で complete であると定義し，G が或る Complete group $\bar{G}$ の（structure をも含めた意味で）dense subgroup になつてゐる時に，G はその structure に關して completion が可能であると定義する。（A. Weil, Sur les espaces a structure uniforme, Actualité, 551, p.30 參照）。
A. Weil は G が completion が可能であるための 1つの充分條件を導いてゐる（ibid, p. 32）が，以下 (2°) に於て 1つの必要且充分なる條件を与へる。

尚 容易にわかる様に G のどの right-invariant structure に關する Cauchy family の全体も一致する。left-invariant structure に關しても同様である。又，G が1つの right- 又は left-invariant structure によつて completion が可能であれば，他の任意の right-invariant structure 及び left-invariant structure によつても completion が可能が可能であり，しかも それらの completion は，G を G に寫す様な對應によつて isomorphic になることも容易に証明される。從つて，單に，G は completion が可能であるといふ表現が許される。

しかし，G が，1つの一般の，即ち右にも左にも invariant でない structure に關して complete であつても，invariant structure に關しては completion が可能であるとは限らない。(3°) に於てこの様な G の例を与へる。

(2°) 以下に述べることは一般の(可附番性を仮定しない) structureに関して成立するけれども ここでは簡単のためにGがMetrisableであると仮定する。

定理 Gがcompletionが可能であるための必要且充分なる條件は、Gのright-invariant metricに関するCauchy sequenceの全体と, left-invariant metricに関するCauchy sequenceの全体とが一致することである。

証明 條件が必要なことは容易にわかるから、充分なことを証明する。そのために先づGの任意のright-invariant metric dを1つ固定する。そして次の(A)と(B)を証明すれば、後は一般のmetric spaceのcompletionと同様に出来る。

(A) $d(x_m, x_n) \to 0$ なる時 $d(x_m^{-1}, x_n^{-1}) \to 0$.

(B) $d(x_m, x_n) \to 0$ 及び $d(y_m, y_n) \to 0$ なる時
$d(x_m y_m, x_n y_n) \to 0$.

(A)の証明. $d(x, y)$はright-invariant metricであるから、$d'(x, y) \equiv d(x^{-1}, y^{-1})$は1つのleft-invariant metricである。このことと定理の條件とにより、(A)は明らかに成立する。

(B)の証明は、Gに関する何らの仮定なしに、一般の場合に出来る。$d(x_m y_m, x_n y_n)$が$m, n \to \infty$の時$\to 0$でないと仮定して矛盾を導く。先づこの仮定から或$\varepsilon > 0$と、

(1) $m_1 < n_1 \leqq m_2 < n_2 \leqq \dots\dots \leqq m_k < n_k \leqq \dots\dots$ なるintegerの系列 $\{m_k \mid 1 \leqq k < \infty\}$, $\{n_k \mid 1 \leqq k < \infty\}$が存在して、

(2) $d(x_{m_k} y_{m_k}, x_{n_k} y_{n_k}) \geqq \varepsilon$, $1 \leqq k < \infty$になる。

次に $d(x_m, x_n) \to 0$ なることからinteger pを定めて、

(3) $m, n \geqq p$ならば $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{3}$ なる様に出来る。更にこのpを用ひて、integer qを定めて、

(4) $m, n \geqq q$ ならば $d(x_p y_m, x_p y_n) < \frac{\varepsilon}{3}$ なる様にすることが出来る。(何となれば: $d(x_p y_m, x_p y_n) = d(x_p y_m y_n^{-1} x_p^{-1}, e)$

これが $\to 0$ なることは，$d(y_m, y_n) \to 0$

なることゝ．乗法の連続性から明らかである．)

しからば (1) の中で $m_k \geqq \max(p, q)$ なる如き k については，

d が right-invariant なること及び (3), (4) から，

$$d(x_{m_k} y_{m_k}, x_{n_k} y_{n_k})$$

$$\leqq d(x_{m_k} y_{m_k}, x_p y_{m_k}) + d(x_p y_{m_k}, x_p y_{n_k}) + d(x_p y_{n_k}, x_{n_k} y_{n_k})$$

$$< d(x_{m_k}, x_p) + \frac{\varepsilon}{3} + d(x_p, x_{n_k})$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

を得るが，これは (1) と矛盾する．(証明終)

(3°) 以下に　式 metric ρ に関しては complete であるが，invariant metric に関しては completion が，可能でない様な group G の例を与へる。

G は，closed interval $[0, 1]$ の homeomorphism で両端の点を動かさないもの全体の集合とし，group multiplication は mapping をつゞけて行ふことであるとする。更に metric d を

$$d(x, y) \equiv \operatorname{Sup}\{\, |x(t) - y(t)| \mid t \in [0, 1] \,\}$$

で定義すると $d(x, y)$ は right-invariant である．従って

$$d'(x, y) \equiv d(x^{-1}, y^{-1})$$

は left-invariant metric である．今

$$\rho(x, y) \equiv d(x, y) + d'(x, y)$$

と定義すれば，metric ρ に関して G は complete になる。しかし次に定義する系列 $\{x_n \mid 1 \leqq n < \infty\}$ は d に関しては Cauchy sequence であるが，d' に関しては Cauchy sequance をなさない (従って G は d に関しては completion が可能でない):

$$x_n(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n-1}}\, t, & 0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{2^{n-1}} \{(2^n - 1)t - (2^{n-1} - 1)\} & \dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1. \end{cases}$$

1947. 3 12