35. 有理型函數ノ除外値ニ就テ

(阪大)　遠木　幸成

$w=f(z)$ ヲ $|z|<R\leqq\infty$ デ一價超越有理ヲ函數トシ ソノ逆函數ヲ $z=\varphi(w)$

トスルトキ $\zeta=\varphi(w)$ ノ Riemann 面ガ如何ナル構造ヲモテバ $w=a$ ガ Nevanlinna ノ意味デ除外値 ($\lim_{r\to\infty} \frac{m(r,a)}{T(r)}>0$) デアルカ否カトイフ問題ニ就テハ多クノ人々ニヨリ研究サレテヰルガ私ハ数学会ノ数物年会デ発表更ニ昨年ノ秋ノ数学会ノ例会デオ話シシタコトヲ述ベマス。

$\boxed{\text{Lemma 1}}$ $z=\varphi(w)$ ガ領域Δデ p 價單葉ナ代数型函数トスレバ分岐点ノ数ハ高々 $2(p-1)$ 個デアル。

[証明] Δ ノ Euler 指標ヲ ρ_0 トシ Δ上ノ $z=\varphi(w)$ ノ Riemann 面ノ Euler 指標ヲ ρ トスレバ Hurwitz ノ関係式ニヨリ

$$\rho = p\rho_0 + \nu \quad \cdots\cdots (1)$$

但シ ν ハ分岐次数ノ總和トスル。

然ルニ $z=\varphi(w)$ ハ單葉函数ナル故ニ z 平面上ノ一枚ノ領域ニ写像サレテヰルカラ ρ ハ写像領域ノ境界数ヨリ2ダケ小サイ値デアル。

他方 $z=\varphi(w)$ ガ p 價ナルコトヨリ $z=\varphi(w)$ ノ Riemann 面ノ境界数ハ Δ ノ境界数 (ρ_0+2) ノ高々 p 倍デアル。

故ニ $p(\rho_0+2)-2 \geqq \rho$

(1) ニ代入シテ $p(\rho_0+2)-2 \geqq p\rho_0+\nu$ $\quad \therefore 2(p-1)=\nu$ (証)

$\boxed{\text{Lemma 2}}$ Modul M ナル円環領域デ q 價單葉ナ正則函数 $z=\varphi(w)$ ノ像領域 D ハ二重連結デソノ直径ヲ d トシ二ツノ境界ノ距離ヲ δ トスレバ、M ト q ダケニヨッテ定マル常数 k ガ存在シテ $d<k\delta$ トナル。

[証明] $\zeta=w^{\frac{1}{q}}$ ナル函数デ w 平面上ノ Modul M ノ円環領域ヲ ζ 平面上ノ Modul $\frac{1}{q}M$ ナル円環領域Δニ写像スレバΔハ $z=\varphi(\zeta^q)$ ニヨリ D ニ一対一ニ等角写像サレル。故ニ Teichmüller ノ円環領域ニ関スル曲率定理[1]ニヨリ $d<k\delta$ ナルコトガ直チニワカル。

$\boxed{\text{定理 1}}$ $w=f(z)$ ヲ $|z|<R\leqq\infty$ デ一價超越有理型ナ函数トシ、ソノ逆函数ヲ

脚注 1) Teichmüller; Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildung Deutsch Math., 3 (1938) pp. 621-678.

$z=\varphi(w)$ トスルトキ次ノ條件 i) ii) ヲ満足スルナラバ $m(r,a)$ ハ有界デアル。

i) アル正数 ρ ガアッテ $|w-a|<\rho$ 上ニアル $z=\varphi(w)$ ノ Riemann面ガスベテ高々 p 葉ノ Insel バカリカラナッテヰル

ii) 円 $|w-a|=\rho$ ノ z 平面上ニ於ケル原像ガ原点ト無限遠点トヲ分ツモノハ有限個シカナイ。2)（但シ $f(0)\neq a$ トス）

［証明］吾々ハ $\rho=2$ トシテモ一般性ヲ失ハナイ故ニ $\rho=2$ トシテ証明シヨウ。

$|w|<2$ ノ原像 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ガ $|z|=r$ ナル円ヲ切リ取ッタトキノ弧ノハル中心角ヲ夫々 $\Theta_1(r), \Theta_2(r), \ldots, \Theta_n(r)$ トシ 十分 r ヲ大キクトッテアルトスレバ條件 ii) ニヨリ $\sum_{i=1}^{n}\Theta_i(r)<2\pi$ デアル。C_i ニ含マレル $|w-a|<1$ ノ原像ヲ C_i' トシ $z=0$ ヨリ C_i' マデノ距離ヲ r_i トシ C_i' ニヨリ切リ取ラレタ $|z|=r$ ノ弧ヲ β_i トスル。

今円環領域 $1<|w|<2$ ヲ Modul $\frac{1}{2p-1}$ ナル $(2p-1)$ 個ノ円環領域ニ分ケレバ $1<|w|<2$ 上ノ各 Insel ハ Lemma 1 ニヨリ少クトモ一ツノ円環領域ノ上ニハ分岐点ヲモタナイ。故ニ $\zeta=\log z$ ニテ C_i ヲ ζ 平面ニ写像シテ考ヘレバ Lemma 2 ニヨリ p ニヨッテ定マル常数 k ガ存在シテ

$$\log\frac{r}{r_i}<k\Theta_i(r) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

又 $|w-a|<2$ 上ノ Insel ハ高々 p 葉ナル故ニ

$$\int_{\beta_i(r)}\frac{\partial \arg\frac{1}{f(z)-a}}{\partial\theta}\,d\theta \leqq 2p\pi \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

(2) 及ビ (3) ニヨリ

$$m(r,a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{1}{f(z)-a}\right|d\theta=\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\int_{\beta_i(r)}\log\left|\frac{1}{f(z)-a}\right|d\theta$$

脚注 2) 私ハコノ定理ヲ 1942 年ノ数物年会デ証明シソノ後辻村氏ヨリ学士院記事 18 デ別証明ヲ与ヘラレタガ共ニ條件 ii) ヲ忘レテヰタ。コノ條件 ii) ガ必要ナルコトハ ii) ヲ除ケバ定理ガ成立シナイ例ヲ本論文ノ終リデ与ヘルカラソレヲ参照セレタイ。

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\int_{\beta_i(r)}\int_{r_i}^{r}\frac{\partial \log\left|\frac{1}{f(z)-a}\right|}{\partial \log t}\, d\log t\, d\theta = \frac{i}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\int_{\beta_i(r)}\int \frac{\partial \arg\frac{1}{f(z)-a}}{\partial\theta}\, d\log t\, d\theta$$

$$< \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\int_{r_i}^{r} 2\pi p\, d\log t < p\sum_{i=1}^{n} k\,\Theta_i(r) < 2\pi k p \qquad \text{(証了)}$$

系 (Teichmüller) $w=f(z)$ヲ$|z|<R\leqq\infty$デ一價超越有理型ナ函數トシソノ逆函數ヲ$z=\varphi(w)$トスルトキ. アル正數ρガアッテ, $|w-a|<\rho$上ニアル$z=\varphi(w)$ノRiemann面ガスベテ單葉ナInselバカリカラナッテヰルナラバ$m(r,a)$ハ有界デアル. (但シ$f(0)\neq a$トス)

[證明] $|w-a|<\rho$上ノInselガ單葉ナルコトヨリ條件ii)ハ明ラカニ滿足サレテヰル故ニ定理1ヨリ直チニ成立スル.

$\boxed{\text{定理 2}}$ $w=f(z)$ヲ$|z|<R\leqq\infty$デ一價超越有理ナ函數トシソノ逆函數ヲ$z=\varphi(w)$トスルトキアル正數ρガアッテ$|w-a|<\rho$上ニアル$z=\varphi(w)$ノRiemann面ガスベテ高々p葉ノInselバカリカラナッテヰルナラバ $\varliminf_{r\to\infty} m(r,a)<K$トナル. 但シ$K$ハ$p$及ビ$\rho$ニヨッテ定マル常數デアル.

[證明] 若シ十分小サナρ'ヲトッタトキ$|w-a|<\rho'$ノ原像ガ定理1ノ條件ii)ヲ滿足スルナラバ定理1ニヨリ直チニ成立スル。故ニ如何程ρ'ヲ小サクトッテモii)ヲ滿足シナイトスル. 本一般性ヲ失フコトナク$\rho=1$トオクコトガ出來ル. 然ルトキハ円環領域$e^{-(2p-1)\pi}<|w-a|<1$ヲModul πナル$(2p-1)$個ノ円環領域ニ分ケレバ, 各Inselハ少クトモ一ツノ円環領域ノ上ニハ分岐点ヲモタナイ。從ッテソノz平面上ノ原像ハModul πノ二重連結領域トナル. (Hurwitzノ關係式ヨリ明ラカ) シカモ原点ト無限遠点トヲ分ツトスレバTeichmüllerノ曲歪定理ニヨリ適當ニr_iヲ選べバ$|z|=r_i$ハ全クModul πノ二重連結領域ニ含マレル。

故ニ $\quad m(r_i,a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^{+}\left|\frac{1}{f(z)-a}\right|d\theta\leqq e^{(2p-1)\pi}$

故 $\quad \varliminf_{r\to\infty} m(r,a)<e^{(2p-1)\pi}$ (證了)

〔系〕 $W=f(Z)$ ヲ $|Z|<R\leqq\infty$ デ一価超越有理型ナ函数トシ、ソノ逆函数ヲ $z=\varphi(w)$ トスルトキアル正数 ρ ガアッテ $|w-a|<\rho$ 上ニアル $z=\varphi(w)$ ノ Riemann 面ガスベテ高々 p 葉ナ Insel バカリカラナッテヰルナラバ $w=a$ ハ除外値デハアリ得ナイ。

次ニ吾々ハ定理1ニ於テ條件 ii) ヲ除ケバ定理1ガ成立シナイ例ヲ挙ゲヨウ。

$$f(z)=z\frac{\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\left(\frac{z}{3^{(2n)!}}\right)^2\right]}{\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\left(\frac{z}{3^{(2n-1)!}}\right)^2\right]}$$

コノ函数ハ $z=\pm3^{(2n)!}$ $(n=0,1,2\cdots\cdots)$ デ零点ヲ $z=\pm3^{(2n-1)!}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ デ極ヲモツ函数デ円周 $|z|=3^{(2n)!}$ 上デハ $|f(z)|$ ハ n ガ十分大ナラバ非常ニ小サク $|z|=3^{(2n-1)!}$ 上デハ $|f(z)|$ ハ非常ニ大キクナル故ニ ρ ヲ十分小サク選ベバ $|w|<\rho$ 上ノ $f(z)$ ノ逆函数 $z=\varphi(w)$ ノ Riemann 面ハ高々二葉ノ Insel バカリカラナッテヰルガ條件 ii) ヲ満足シナイ然カモ $m(r,0)$ ハ有界デハアリ得ナイ。

1947. 3. 10