32. 或 Characteristic subgroup ヲモツ群ノ automorphism ニツイテ

（阪大）永尾　汎

$\mathfrak{G}$ ヲ characteristic subgroup $\mathfrak{N}$ ヲモツ群トスル。
又 $\mathfrak{G}/\mathfrak{N} \simeq \mathfrak{A}$

$\mathfrak{G} = \sum_{a\in\mathfrak{a}} \mathfrak{N} S_a$ 　　$C_{a,b} = S_a S_b S_{ab}^{-1}$ トスル。

更ニ $A\mathfrak{G}, A\mathfrak{N}, A\mathfrak{a}$ ヲモッテ夫々 $\mathfrak{G}, \mathfrak{N}, \mathfrak{a}$ ノ automorphism 全体ノ作ル群トスレバ．$A\mathfrak{G}$ ノ元 α ハ $\mathfrak{N}$ 及 $\mathfrak{a}$ ノ automorphism $\alpha', \bar{\alpha}$ ヲヒキオコス故 $\alpha = (\alpha', \bar{\alpha})$ ヲ対應サセル事ニヨリ，

$$A\mathfrak{G} \sim_{\text{on}} A\mathfrak{N} \times A\mathfrak{a}.$$

コヽデ $A\mathfrak{N} \times A\mathfrak{a}$ ノ単位元 $(1', \bar{1})$ ニ対応スル $A\mathfrak{G}$ ノ self-conjugate ナ subgroup ヲ $M\mathfrak{G}$ デ表ハセバ．$A\mathfrak{G}$ ハ $M\mathfrak{G}$ ノ $A\mathfrak{N} \times A\mathfrak{a}$ ニ含マレル或 subgroup ニ由ル extension デアル。コヽデハ $M\mathfrak{G}$ 及 $M\mathfrak{G}$ ノ extension トシテノ $A\mathfrak{G}$ ヲ決定スル。

〔定理1〕 $M\mathfrak{G} \ni \alpha$ ナラバ $Z_G = G^{\alpha} G^{-1}$ ハ $\mathfrak{N}$ ノ center ニ含マレ且 $N \in \mathfrak{N}$ ナラバ $Z_N = E$ （Eハ$\mathfrak{G}$ノ単位元）デアル。

〔証明〕 $S_a^{\alpha} = N_a S_a$ トマレバ

$$(S_a N)^{\alpha} = N_a S_a N$$

$$\therefore\ (NS_a)^{\alpha} = (S_a N^{S_a})^{\alpha} = N_a N S_a$$

$$= N^{\alpha} S_a^{\alpha} = N N_a S_a$$

$$\therefore\ N N_a = N_a N$$

コレハ $\mathfrak{N}$ ノ任意ノ元 N ニツイテ成立スル故 $N_a \in (\mathfrak{N})$: $\mathfrak{N}$ ノ center 又 $\mathfrak{G}$ ノ任意ノ元 G ハ $S_a N$ ナル形ニ表ハサレル故

$$Z_G = G^{\alpha} G^{-1} = N_a S_a N (S_a N)^{-1} = N_a$$

ヨッテ定理ガ証明出来タ。　　　　（証終）

〔定理2〕 $N \in \mathfrak{N}$ ナラバ $Z_{NG} = Z_{GN} = Z_G$ デアル。

（証明） $Z_{NG} = (NG)^{\alpha} G^{-1} N^{-1} = N G^{\alpha} G^{-1} N^{-1} = N Z_G N^{-1} = Z_G$

又 $Z_{GN} = Z_{N^* G} = Z_G$

以上ニ由リ $M\mathfrak{G}$ ノ元 α ハ $Z_a = S_a^{\alpha} S_a^{-1}$ ニ由リ一意的ニ決定サレル事ガ分ッタ。

〔定理3〕 $\mathfrak{a}$ カラ $\mathfrak{N}$ ノ center ノ中ヘノ寫像 $a \to Z_a$ ガ上ノ様ナ意味デ $M\mathfrak{G}$ ノ元ヲ決定スルタメニハ，即チ

$\alpha : NS_a \to N Z_a S_a$ ガ $M\mathfrak{G}$ ニ属スルタメニハ，

⊛ $Z_a Z_b^{S_a} = Z_{ab}$ ナル事ガ必要且十分デアル。

（証明）

（必要）$\alpha \in M_{\mathfrak{G}}$ デアレバ $C_{a,b} = C_{a,b}^{\alpha} = S_a^{\alpha} S_b^{\alpha} S_{ab}^{-\alpha}$

$$= Z_a S_a Z_b S_b S_{ab}^{-1} Z_{ab}^{-1}$$

$$= Z_a Z_b^{S_a} S_a S_b S_{ab}^{-1} Z_{ab}^{-1}$$

$$= Z_a Z_b^{S_a} Z_{ab}^{-1} C_{a,b}$$

$$\therefore\ Z_a Z_b^{S_a} Z_{ab}^{-1} = E \rightarrow Z_a Z_b^{S_a} = Z_{ab}$$

（十分）Z_a ガ⊛ナル條件ヲ充タストスル。

$G_1 = N_1 S_a$ 　　$G_2 = N_2 S_b$ トスレバ．

$$(G_1 G_2)^{\alpha} = (N_1 S_a N_2 S_b)^{\alpha} = (N_1 N_2^{S_a} C_{a,b} S_{ab})^{\alpha}$$

$$= N_1 N_2^{S_a} C_{a,b} Z_{ab} S_{ab}$$

一方 $G_1^{\alpha} G_2^{\alpha} = (N_1 S_a)^{\alpha} (N_2 S_b)^{\alpha} = N_1 Z_a S_a N_2 Z_b S_b$

$$= N_1 Z_a N_2^{S_a} Z_b^{S_a} C_{a,b} S_{ab}$$

$$= N_1 N_2^{S_a} C_{a,b} Z_a Z_b^{S_a} S_{ab}$$

$$= N_1 N_2^{S_a} C_{a,b} Z_{ab} S_{ab}$$

$$\therefore\ (G_1 G_2)^{\alpha} = G_1^{\alpha} . G_2^{\alpha}$$

且 α ハ $\mathfrak{G}$ ノ元ノ間ニ一対一ノ対応ヲ與ヘル故 $M_{\mathfrak{G}}$ ニ屬ス。

（証終）

〔定理 4.〕 $M_{\mathfrak{G}}$ ハ $\mathfrak{A}$ カラ $C(\mathfrak{N})$ ノ中ヘノ寫像 $a \rightarrow Z_a$ デ⊛ナル條件ヲ満足スルモノ全体デ．$(a \rightarrow Z_a) \cdot (a \rightarrow Z'_a) = (a \rightarrow Z_a Z'_a)$ ト積ヲ定義スル事ニ由リ出来ル群ト同型デアル。

（証明） Z_a, Z'_a ニ由リ決定サレル $M_{\mathfrak{G}}$ ノ元ヲ夫々 α, α' トスレバ

$S_a^{\alpha\alpha'} = (Z_a S_a)^{\alpha'} = Z_a Z'_a S_a$ ナル故

定理 3．ヨリ明デアル。

〔系1〕 $M_{\mathfrak{G}}$ ハ Abel 群デアル。

〔系2〕 $\mathfrak{N}$ ガ特ニ $\mathfrak{G}$ ノ center ニ含マレレバ⊛ナル條件ハ

$Z_a Z_b = Z_{ab}$ トナリ．從ツテ $M_{\mathfrak{G}}$ ハ $\mathfrak{A}$ カラ $\mathfrak{N}$ ノ中ヘノ homomorph ナ mapping 全体ノ作ル群ト同型デアル

次ニ A_g ノ元 α ヲトリ $Sa^{\alpha} = N_a Sa^{\bar{\alpha}}$ トスレバ，α ハ $(\alpha', \bar{\alpha}, N_a)$ ニ由リ一意的ニキマル。逆ニコノ意味デ $(\alpha', \bar{\alpha}, N_a)$ ガ A_g ノ元 α ヲ決定スルタメノ條件ヲ示メル。

〔定理5〕 $(\alpha', \bar{\alpha}, N_a)$ ガ上ノ意味デ A_g ノ元ヲ決定スルタメノ必要十分ナル條件ハ

(1) $C_{a}^{\alpha'}{}_{b}\, N_{ab} = N_a N_b^{Sa^{\bar{\alpha}}} C_{a^{\bar{\alpha}}, b^{\bar{\alpha}}}$

(2) $\mathfrak{N}$ ノ仕意ノ元 N ニ對シ

$$N^{Sa^{\bar{\alpha}}} N_a = N^{\alpha'^{-1}} Sa^{\alpha'}$$

ガ成立スル事デアル。

（証明）（必要）

$$\begin{aligned} C_{a,b}^{\alpha'} &= Sa^{\alpha} Sb^{\alpha} Sab^{-\alpha} \\ &= N_a Sa^{\bar{\alpha}} N_b Sb^{\bar{\alpha}} S_{(ab)}^{-1\bar{\alpha}} N_{ab}^{-1} \\ &= N_a N_b^{Sa^{\bar{\alpha}}} C_{a^{\bar{\alpha}}, b^{\bar{\alpha}}} N_{ab}^{-1} \end{aligned}$$

故ニ（1）ハ必要條件デアル。

$$\begin{aligned} \text{又}\ (Sa N Sa^{-1})^{\alpha} = (N^{Sa})^{\alpha'} &= N_a Sa^{\bar{\alpha}} N^{\alpha'} Sa^{-\bar{\alpha}} N_a^{-1} \\ &= N^{\alpha'} Sa^{\bar{\alpha}} N_a \end{aligned}$$

故ニ（2）ハ必要條件デアル。

（十分）

$\mathfrak{G}$ ハ $\mathfrak{N}$ ノ元ト Sa カラ生成サレ基本関係トシテ $\mathfrak{N}$ ノ関係及 $Sa N Sa^{-1} = N^{Sa}$, $Sa\, Sb = C_{a,b} Sab$ ヲモツ。(1)(2) ヲ $(\alpha', \bar{\alpha}, N_a)$ ヲ充タセバ α ナル *mapping* ガコレラノ関係式ヲ保存スル事ハ必要條件ノ証明ヲミレバ明デアル。従ツテ α ハ A_g ニ属スル。

次ニ A_g ハ M_g ノ $A_n \times A_\alpha$ ノ或 *subgroup* ニ由ル *extension* デアルガ，代表系 $\bar{\alpha} = (\alpha, \alpha, N_a, a)$ ヲキメタトキ，ソノ *factor set* 及 *automorphism* ヲ決定スル。

(I) *automorphism*

$\alpha = \alpha', \alpha, N_a, a \qquad \beta = (\iota', \bar{s}, Z_u)$ トスレバ

$\underline{\bar{\bar{\alpha}}^{-1}\beta\bar{\bar{\alpha}} = (1', \bar{1}\ Z_a^{\alpha'\bar{\alpha}^{-1}})}$ デアル。

$\bar{\bar{\alpha}}^{-1}\beta\bar{\bar{\alpha}} \qquad -\alpha'^{-1}$

$$\because\ S_a = (N_{\alpha, a}^{\bar{\alpha}^{-1}} S_a^{\bar{\alpha}^{-1}})^{\beta\bar{\bar{\alpha}}}$$
$$= (N_{\alpha, a}^{-\alpha'^{-1}\bar{\alpha}^{-1}} Z_a^{\bar{\alpha}^{-1}} S_a^{\bar{\alpha}^{-1}})^{\bar{\bar{\alpha}}}$$
$$= N_{\alpha, a}^{-\bar{\alpha}^{-1}} Z_a^{\alpha'\bar{\alpha}^{-1}} N_{\alpha, a}^{\bar{\alpha}^{-1}} S_a = Z_a^{\alpha'\bar{\alpha}^{-1}} S_a$$

(II) *factor sit.*

$\bar{\bar{\alpha}} = (\alpha, \bar{\alpha}, N_{\alpha, a})$, $\bar{\bar{\beta}} = (\beta', \bar{\beta}, N_{\beta, a})$ トスレバ

$\bar{\bar{\alpha}}\bar{\bar{\beta}}\,\overline{\overline{\alpha\beta}}^{-1} = (1', \bar{1}, N_{\alpha, a}^{\alpha'^{-1}} N_{\beta, a^{\bar{\alpha}}}^{(\alpha\alpha')^{-1}} N_{\alpha\beta, a}^{-(\alpha'\beta')^{-1}})$ デアル。

$$\because\ S_a^{\bar{\bar{\alpha}}\bar{\bar{\beta}}\,\overline{\overline{\alpha\beta}}^{-1}} = (N_{\alpha, a} S_a^{\alpha})^{\bar{\bar{\beta}}\,\overline{\overline{\alpha\beta}}^{-1}} = (N_{\alpha, a}^{\beta'} N_{\beta, a^{\bar{\alpha}}} S_a^{\alpha\beta})^{\overline{\overline{\alpha\beta}}^{-1}}$$
$$= \underline{N_{\alpha, a}^{\alpha'^{-1}} N_{\beta, a^{\bar{\alpha}}}^{\beta'^{-1}\alpha'^{-1}}} N_{\alpha\beta, a}^{-\beta'^{-1}\alpha'^{-1}} S_a$$

以上ヲマトメレバ次ノ定理ヲ得ル

〔定理6〕 characteristic subgroup $\mathfrak{N}$ ヲ $\mathfrak{G}$ ガ含ムトスレバ $A_{\mathfrak{G}}$ ハ $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ カラ $C(\mathfrak{N})$ ノ中ヘノ定理3. ㊟ノ條件ヲ充タス mapping ノ作ル Abel 群 $M_{\mathfrak{G}}$ ヲ self conjugate ナ subgroup トシテ含ミ、$A_{\mathfrak{N}}$ 及 $A_{\mathfrak{G}/\mathfrak{N}}$ ノ元 $\mathfrak{K}$. $\bar{\alpha}$ ニ対シ、定理5ノ(1) (2)ヲミタス N_{α} ヲ一ツ定メレバ、$A_{\mathfrak{G}}$ ハ(I).(II)ニ由リ決定サレル $M_{\mathfrak{G}}$ ノ extension トシテ定メル事ガ出来ル。

(1947. 2. 12)