31. 有限次元 modular 束ニ於ケル Remak-Schmidt 定理ニツイテ

(阪大) 永尾 汎

ココデ群ノ直積分解ニ關スル Fitting ノ方法ヲ有限次元 modular 束ニ移シテ考ヘテミタイト思ヒマス。即チ束ニ Endmorphismus 及 normal ナ Endmorphismus ナル概念ヲ定義シテ ソレト束ノ元ノ直和分解トノ關係ヲ考察スレバ所謂 Remak-Schmidt ノ定理迄及或元ノ二ツノ直和分解ノ共通ノ Verfeinerung ガ存在スルタメノ完全條件(定理11)ハ群ニ於ケル結果ヲ殆ンドソノマヽ束ニ移シテ得ラレマス。シカシ Math. Zeit. Band 39, Heft 1 (1934) ニ於ケル Fitting ノ論文ノ Satz 4 及同上 Band 41, Heft 3 (1936) ニ於ケル Satz 3 ニ相當スル定理ハ束ノ場合ニハ定理 12, 13 ノ形デ表ハサレ、群ニ於ケル結果ヲソノマヽ移ス事ガ出来マセンデシタ。ココデ群特有ノ性質ガ本質的ニキイテキテオル様ニ思ハレマス。

[定義1] L ヲ有限ニ次元 modular 束トスルトキ、L ノ join ヲ保存スルソノ中ヘノ Homomorphismus デ最小元 0 ニハ 0 ガ對應スルモノヲ L ノ "Endmorphismus" ト呼ブ事ニスル。

[定義2] L, L' ガ共ニ有限次元 modular 束デ L カラ L' ノ或 Ideal $[0, a']$ ノ上ヘノ joins ヲ保存スル Homomorphismus θ ガ次ノ條件ヲ充タストスル。即チ L ノ元 a_θ ガ存在シテ、θ ナル寫像デ $[a_\theta, 1] \simeq [0, a']$ デアル。

コノトキ、θ ヲ L カラ L' ノ中ヘノ "normal ナ Homomorphismus" デアルト定義スル。

特ニ L カラ L 自身ノ中ヘノ normal ナ Homomorphismus ヲ L ノ "normal ナ Endmorphismus" ト定義スル。

又上ノ a_θ ヲ θ ニ對應スル元ト呼ブ事ニスル。

以上ノ定義カラスグニ出ル二三ノ定理ニツイテ述ベレバ

［定理1］（θヲ一ツノ写像トスルトキ．xノθニ由ル像ヲ以後 $x\cdot\theta$ デ表ハス事ニスル）

θヲLカラL'ノ中ヘノ normal ナ Homomorphismus トシ．θニ對應スルLノ元ヲa_θトスレバ　Lノ元xニ対シ $x\cdot\theta=0$ ナルタメノ完全條件ハ $x\leqq a_\theta$ ナル事デアル。又任意ノLノ元xニ対シ．$x\cdot\theta=(x\cup a_\theta)\cdot\theta$ガ成立スル。

（証明）$(x\cup a_\theta)\cdot\theta=x\cdot\theta\cup a_\theta\cdot\theta$

コヽデ定義ヨリ$a_\theta\cdot\theta=0$カスグ出ル故　結局 $x\,\theta=(x\cup a_\theta)\theta$ デアル。

次ニ $x\cdot\theta=0 \rightleftarrows (x\cup a_\theta)\cdot\theta=0 \rightleftarrows x\cup a_\theta=a_\theta$ 即チ、定理ノ前半ノ主張ガイヘタ。

［定理2］θ_1,θ_2ヲLノ二ツノ Endomorphismus トスレバ $x\cdot(\theta_1+\theta_2)=x\theta_1\cup x\theta_2$ ニ由リ定義サレル写像 $\theta+\theta_2$ 又Lノ Endomorphismus デアル。

（証明）$(x\cup y)\cdot(\theta_1+\theta_2)=(x\cup y)\cdot\theta_1\cup(x\cup y)\cdot\theta_2=$
$x\cdot\theta_1\cup y\cdot\theta_1\cup x\cdot\theta_2\cup y\cdot\theta_2=x\cdot(\theta_1+\theta_2)\cup y\cdot(\theta_1+\theta_2$

［定理3］θ_1，θ_2ヲ夫々LカラL_1ノ中 L_1カラL_2ノ中ヘノ normal ナ Homorphismus トスレバ．$\theta_1\theta_2$ハLカラL_2ノ中ヘノ normal ナ Homomorphismusデアル.
（コヽデ $\theta_1\theta_2$ ト書イタノハ写像トシテノ積ノ意味デアル.

（証明）θ_1ニ由リLハL_1ノ Ideal $[0,b]$ノ上ヘ写像サレ且 θ_1ニ對應スルLノ元ヲa_{θ_1}トスル。

又θ_2ニ由リL_1　L_2ノ Ideal $[0,c]$ノ上ヘ写像サレ且θ_2ニ對應スルL_1ノ元ヲb_{θ_2}トスル。

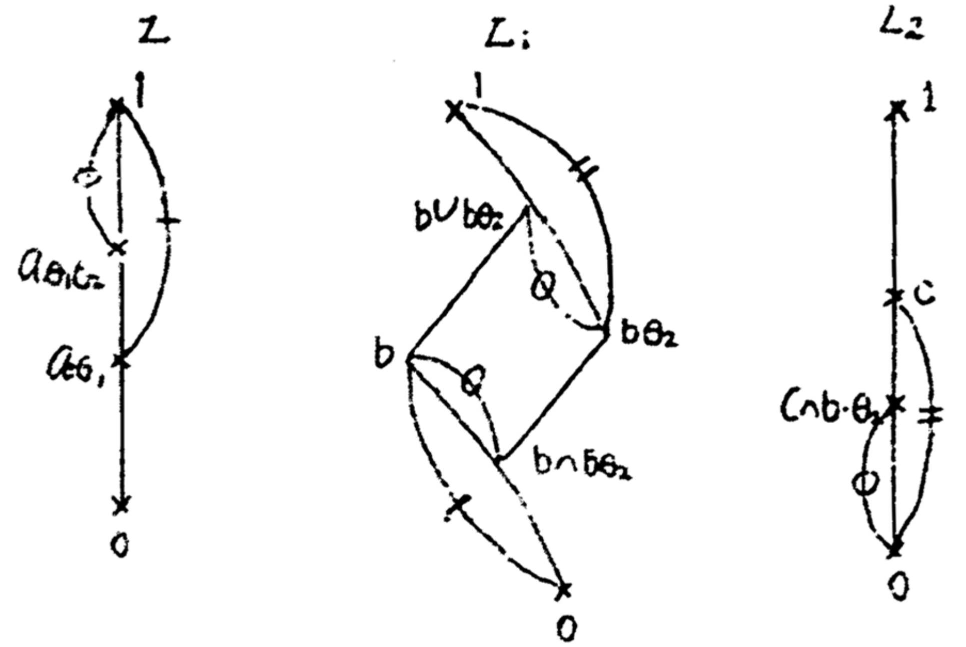
θ_1ニ由リ$[a_{\theta_1},1]\simeq[0,b]$，$\theta_2$ニ由リ$[b_{\theta_1},1]\simeq[0,c]$デアル。

θ_2ニ由リ$[0,b]$カラ$[0,c\wedge b\cdot\theta_2]$ノ上ヘノ normal ナ Homomorphismus ガ與ヘラレ、且コノ對應デ
$[b\wedge b_{\theta_2}\ \ b]\simeq[0,c\wedge b\cdot\theta_2]$ デアル。

故ニ $[a_{\theta_1}, 1]$ ト $[0, b]$ ノ間ノ *Isomorphismus* ニ於テ $b \frown b_{\theta_1}$ ニ對應スル $[a_{\theta_1}, 1]$ ノ元ヲ $a_{\theta_1\theta_2}$ トスレバ $\theta_1 \cdot \theta_2$ ニ由リ L ハ L_2 ノ *Ideal* $[0, c \frown b\cdot\theta_2]$ ノ上ニ *join* ヲ保存シテ寫像サレ、且コノ對應デ

$$[a_{\theta_1\theta_2}, 1] \simeq [0, c \frown b\cdot\theta_2]$$ デアル。

以上ノ證明ヲ圖ニ由ッテ示セバ次ノ樣ニナル。



以上ヨリ L ノ *Endmorphismus* 全体ヲ考へ、

$$x\cdot(\theta_1 + \theta_2) = x\theta_1 \smile x\theta_2, \quad x\cdot\theta_1\theta_2 = (x\cdot\theta_1)\theta_2$$ ト

和及積ヲ定義スレバコレラハ又 L ノ *Endmorphismus* デアル。明ニ分配律ガ成立スル。

$$\because \quad x\cdot(\theta_1+\theta_2)\theta_3 = (x\theta_1 \smile x\theta_2)\theta_3 = x\theta_1\theta_3 \smile x\theta_2\theta_3 = x(\theta_1\theta_3 + \theta_2\theta_3)$$

次ニ有限次元 *modular* 束ノ元ノ直和分解ニ關スル定理ヲ述ベル。

以後　束ハ常ニ有限次元 *modular* 束トスル。

Endmorphismus ヲ End.、*normal* ナ End. ヲ n. End. ノ *normal* ナ *Homomorphismus* ヲ n. Homo ト略シテ書ク事ニスル。

〔定理４〕　束 L ノ元 a ノ直和分解

$$a = b_1 \smile b_2 \smile \qquad \smile b_r$$

ニ對シ $x\cdot\beta_i = b_i \frown (x \smile \bar{b}_i)$　$\bar{b}_i = b_1 \smile \qquad \smile a_{-i} \smile$

$b_{i+1} \cup \dots \cup b_r$ ニ由リ定義サレル写像 β_i ハ次ノ三條件ヲ充タス。

$$\begin{cases} (1) & \beta_i \ (i=1,2,\dots,r) \text{ ハ } [0.a] \text{ ノ } n.\mathrm{End}. \text{ デアル。} \\ (2) & \beta_i\beta_j=\beta_i \quad : i=j \text{ ナルトキ} \\ & \qquad\ = 0 \quad : i\neq j \text{ ナルトキ} \\ (3) & a(\beta_1+\beta_2+\cdots\cdots+\beta_r)=a \end{cases}$$

逆ニコノ三條件ヲ充タス様ナ $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ ガアレバ

$$a=a\beta_1 \cup a\beta_2 \cup \dots \cup a\beta_r$$

ナル a ノ直和分解ガ存在シ，且 β_i ハコノ直和分解ニ関シテ上ノ様ニシテ得タ $[0.a]$ ノ $n.\mathrm{End}$ デアル。

〔定理4′〕 $[0.a]$ ノソノ中ヘノ写像 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ ガ次ノ條件

$$\begin{cases} (1) & \beta_i \ (i=1,2,\dots,r) \text{ ハ } [0.a] \text{ ノ } n.\mathrm{End}. \text{ デアル。} \\ (2) & a\cdot\beta_i\beta_j=a\beta_i \quad : i=j \text{ ナルトキ} \\ & \qquad\quad = 0 \quad : i\neq j \text{ ナルトキ} \\ (3) & a(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_r)=a \end{cases}$$

ヲ充タセバ $a=a\beta_1 \cup a\beta_2 \cup \dots\dots \cup a\beta_r$ ハ直和分解デアル。

コノ二定理ヲ一緒ニ証明スル。

〔證明〕

I. 定理4ノ前半

(1) $a=b_i \cup \overline{b_i}$，$b_i \cap \overline{b_i}=0$ ナル故，$x \to x \cap b_i$ ナル対應ニ由リ $[\overline{b_i}, a] \simeq [0, b_i]$ デアル。

コヽデ $x \in [\overline{b_i}, a]$ ナラバ $x\cdot\beta_i=b_i \cap (x \cup \overline{b_i})=x \cap b_i$ ナル故上ノ Isomorphismus ハ β_i ニ由リ引キオコサレル。

故ニ β_i ハ a ノ $n.\mathrm{End}.$ デアル。

(2) $x \in [0, b_i]$ ナルトキ，$x=b_i \cap (x \cup \overline{b_i})=x\cdot\beta_i$ ナル故，$\beta_i^2=\beta_i$ ハ明デアル。

又 $i \neq j$ ナレバ $x\cdot\beta_i \leqq \overline{b_j}$ ナル故 $x\cdot\beta_i\beta_j=0$

(3) $a\cdot\beta_i=b_i$ ナル故明デアル。

II. 定理4ノ後半及定理4′

(1)，(2′)，(3)ヲ β_i ガ満足スルトスル

$a\cdot\beta_i = b_i$ トスレバ β_i ガ(3)ヲ充タス事ニ由リ

$a = b'_1 \cup b_2 \cup \cdots\cdots \cup b_r$ デアル。

$\overline{b_i} = b'_1 \cup \cdots\cdots \cup b_{i-1} \cup b_{i+1} \cup \cdots\cdots \cup b_r$ トスル。

$\overline{b_i}\cdot\beta_i = a\cdot(\beta_1 + \cdots\cdots \beta_{i-1} + \beta_{i+1} + \cdots\cdots \beta_r)\cdot\beta_i = 0$

今元 x ノ次元ヲ $d(x)$ デ示ス事ニスレバ.

$d(a) \leqq d(b'_1) + d(\overline{b_1})$

一方 β_1 ニ對応スル元ヲ a_{β_1} トスレバ $\overline{b_1} \leqq a_{\beta_1}$

$\therefore d(a) = d(a/a_{\beta_1}) + d(a_{\beta_1}/\overline{b_1}) + d(\overline{b_1})$

$[0, b'_1] = [0, a\cdot\beta_1] \simeq [a_{\beta_1}, a]$ ナル故 $d(b'_1) = d(a/a_{\beta_1})$

$\therefore d(a) = d(b'_1) + d(\overline{b_1})$

且 $a_{\beta_1} = \overline{b_1}$ デアル。

β_2 ハ $\overline{b_1}$ ノ n. End ヲヒキオコス故 $\mathfrak{Induktion}$ ニ由リ $d(a) =$

$d(b'_1) + d(b'_2) + \cdots\cdots + d(b_r)$ ヲ得ル。

即チ $b_1, \cdots\cdots, b_r$ ハ獨立デアル。

故ニ $a = a_{\beta_1} \cup \cdots\cdots \cup a_{\beta_r}$ ハ直和分解デアル。

即チ定理4ヲ得タ。

β_i ガ更ニ(1), (2), (3)ヲ充タストスレバ、勿論(2')ハ充タス

故, $a = a_{\beta_1} \cup \cdots\cdots \cup a_{\beta_r}$ ガ直和分解ナル事ハヨイ。

故ニ $x\cdot\beta_i = b'_i \frown (x \cup \overline{b_i})$ ナル事ヲ証明スレバ定理4ノ後半ハ証明サレル。

上ニ於テ $a_{\beta_1} = \overline{b_1}$ ヲ結論シタト同様ノ方法ニヨリ $a_{\beta_i} = \overline{b_i}$ ガイヘル。

故ニ β_i ナル対応ガ $[0, b'_i] \simeq [\overline{b_i}, a]$ デアル。

$(x \cup \overline{b_i})\cdot\beta_i = (x\cdot\beta_i \cup \overline{b_i})\cdot\beta_i = x\cdot\beta_i$ ((2)ニ由ル) ナル故

$x \cup \overline{b_i} = x\cdot\beta_i \cup \overline{b_i}$ デアル。

$x\cdot\beta_i \in [0, b_i]$ ナル故

$x\cdot\beta_i = (x\cdot\beta_i \cup \overline{b_i}) \frown b'_i = (x \cup \overline{b_i}) \frown b'_i$

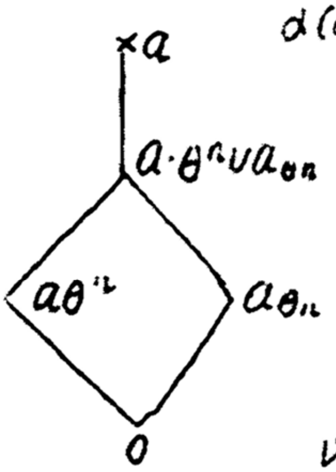
即チ求メル結論ヲ得タ。 [証終]

[定義3.] $a = b_1 \cup \cdots\cdots \cup b_r$ ヲ直和分解トシ, β_i ヲ $x\cdot\beta_i = b_i \frown (x \cup \overline{b_i})$ ニ由リ与ヘラレル n. End. トスルトキ, $\beta_1, \cdots, \beta_r$ ヲコノ直和分解ニ対応スル End. トイフ。

$a = a\cdot\theta^n \vee a_{\theta n}$ ナル直和分解ガ得ラレル。

[証明]　θ_n ハ $[0, a\cdot\theta^n]$ ノ n. End. ヲ與ヘ且ソノ n. End. ニ対応スル元ハ $a\cdot\theta n \wedge a_{\theta n}$ デアル。

仮定ニ由リ $a\cdot\theta^n\cdot\theta^n = a\theta^n$ ナル故. 次元ヲ考ヘレバ $a\cdot\theta^n \wedge a_{\theta n} = 0$ ヲ得ル。



$$d(a) = d(a/a\cdot\theta^n \vee a_{\theta n}) + d(a\theta^n \vee a_{\theta n}/a\cdot\theta^n) + d(a\cdot\theta^n) = d(a/a_{\theta n}) + d(a_{\theta n})$$

コヽデ $d(a/a_{\theta n}) = d(a\cdot\theta^n)$

$$d(a_{\theta n}) = d(a\theta^n \vee a_{\theta n}/a\cdot\theta^n)$$

$\therefore\ a = a\cdot\theta^n \vee a_{\theta n}$ ヲ得ル。

且上デ $a\cdot\theta^n \wedge a_{\theta n} = 0$ ガイヘテ井ルカラ コレハ直和分解デアル。　(証終)

[定理6]　a ガ直既約デアレバ, $a\theta = a$ デアルカ, 又ハ十分大キナ n ニ対シ $a\cdot\theta^n = 0$ トナルカ何レカデアル。

[証明]　定理5ニ由リ $a\theta \neq a$ ナレバ,

$a > a\theta > \cdots > a\theta^n = a\theta^{n+1} = \cdots\cdots$ トスレバ

$a = a\cdot\theta^n \vee a_{\theta n}$ ハ直和分解デアル。故ニコノトキハ a ガ直既約ナル事ニ由リ $a\cdot\theta^n = 0$ トナル。

[定理7]　$[0, a]$ カラ $[0, b]$ ノ上ヘノ n. Homo. ガ存在スルトキ $a \sim b$ ト書ク事ニスル。

θ_1 デ $a \sim b$, θ_2 デ $b \sim c$, $\theta_1\theta_2$ デ $a \simeq c$ トスレバ $a \simeq b \simeq c$ デアル。

[証明]　θ_1 ニ対応スル $[0. a]$ ノ元ヲ a_{θ_1}, θ_2 ニ対応スル $[0, b]$ ノ元ヲ $b\theta_2$ トスレバ $\theta_1\theta_2$ ニ対応スル $[0, a]$ ノ元ハ $[a_{\theta_1}, a] \simeq [0, b]$ ナル Isomorphismus デ $b\theta_2$ ニ対応スル元 $a_{\theta_1\theta_2}$ デアル。

仮定ニ由リ $a_{\theta_1\theta_2} = 0$　故ニ $a_{\theta_1} = 0$, $b\theta_1 = 0$ ヲ得ル。

ヨッテ定理ハ証明サレタ。　(証終)

〔定理8〕 θ ニ由リ $a \sim b$ トシ、更ニ $[0, a]$ ヲ a' ニ対シ コノ写像 θ ニ由リ $a' \simeq b$ トスレバ $a = a' \cup a''$ ナル a ノ直和分解ガ得ラレル。且コヽデ a'' トシテ θ ニ對応スル $[0, a]$ ノ元 a_θ ヲトレバヨイ。

（証明） $[a_\theta, a] \simeq [0, b]$

且 $(a' \cup a_\theta) \cdot \theta = a' \cdot \theta = b$ ナル故 $a = a' \cup a_\theta$ デアル。又 $(a' \wedge a_\theta) \cdot \theta = 0$ ナル故、仮定ニ由リ $a' \wedge a_\theta = 0$

ヨッテ定理ヲ得ル。 （證終）

〔定理9〕 $a = b_1 \cup b_2 \cup \cdots\cdots\cdots \cup b_r$

$= c_1 \cup c_2 \cup \cdots\cdots\cdots \cup c_s$

ヲ a ノ二ツノ直既約分解トスレバ $r = s$ デ且 c_i ノ番号ヲ適当ニツケカヘル事ニ由リ 任意ノ i ニ對シ $a = b_1 \cup b_2 \cup \cdots \cup b_i \cup c_{i+1} \cup \cdots\cdots \cup c_s$ ガ又 a ノ直既約分解トナル様ニ出来ル。

（証明） 二ツノ分解ニ對應スル End. ヲ夫々 $\beta_1, \cdots\cdots, \beta_r$: $\gamma_1, \cdots\cdots, \gamma_s$ トスル。

$b_1 \leq b_1(\gamma_1 + \cdots\cdots + \gamma_s)$ ナル故、

$b_1 = b_1(\gamma_1 + \cdots\cdots + \gamma_s)\beta_1 = b_1(\gamma_1\beta_1 + \cdots\cdots + \gamma_s\beta_1)$

γ_i ハ $[0, b_1]$ カラ $[0, c_i)$ ノ中ヘノ n. Homo. ヲ與ヘル故 定理3ニ由リ $\gamma_i\beta_1$ ハ b_1 ノ n. End. デアル。

スベテノ i ニ対シ $b_1\gamma_i\beta_1 < b_1$ トスレバ、b_1 ハ直既約ナル故、定理6ニ由リ 或 n ガ存在シテ、スベテノ i ニ対シ、

$b_1(\gamma_i\beta_1)^n = 0$ デアル。

故ニ $b_1(\gamma_1\beta_1 + \cdots\cdots + \gamma_s\beta_1)^{sn}$ ヲ考ヘレバ、各項ハ或 $\gamma_i\beta_1$ ヲ Faktor トシテ少クトモ n 回モツ。故ニコレハ0デアル。

コレハ $b_1(\gamma_1\beta_1 + \cdots\cdots + \gamma_s\beta_1) = b_1$ ナル事ニ矛盾スル。

$b_1\gamma_1 = c_1'$ トスレバ

$$b_1 \underset{\gamma_1}{\sim} c_1' \underset{\beta_1}{\sim} b_1$$

コヽデγ_1, β_1ハ上ノ事ニヨリ*Isomorphismus*ヲ与ヘル故

定理7ニ由リ $b_1 \underset{\gamma_1}{\simeq} c_1' \underset{\beta_1}{\simeq} b_1$

$c_1 \underset{\beta_1}{\sim} b_1$ ナル故定理8ニ由リ $c_1 = c_1' \cup c_1''$ ナル直和分解ガ存在シ. c_1ガ直既約ナル事ヨリ $c_1'' = 0$. 即チ $c_1 \underset{\beta_1}{\simeq} b_1$ デアル。

$a' = b_1 \cup c_2 \cup \cdots\cdots \cup c_s$ トスレバ、

$a'\gamma_1 = b_1\gamma_1 = c_1$ 且 $a' \geq \overline{c_1}$ ナル故 $a = a'$

又 $d(b_1) = d(c_1)$ ナル故

$a = b_1 \cup c_2 \cup \cdots\cdots \cup c_s$ ハ直既約分解デアル。

コノ分解ト$a = c_1 \cup c_2 \cup \cdots\cdots \cup c_s$ナル分解ニツイテ上ノ同ジ事ヲヤリ、コレヲ続ケレバ吾々ノ定理ヲ得ル.　　　　(証終)

【定義4】　$a = d_1 \cup \cdots\cdots \cup d_t$ ナル直和分解ガ$a = b_1 \cup \cdots\cdots \cup b_r$ ナル直和分解ノ"*Verfeinerung*"デアルトイフノハ 各b_iニ対シ $b_i = d_{\beta_1} \cup \cdots\cdots \cup d_{\beta_k}$ ナル直和分解ガ存在スルトキトスル。

【定理10】　$a = b_1 \cup b_2 \cup \cdots\cdots \cup b_r$ ……………………(1)

$= c_1 \cup c_2 \cup \cdots\cdots \cup c_s$ ……………………(2)

ナル二ツノ直和分解ニ對シ.共通ノ*Verfeinerung*ガ存在スルタメノ完全條件ハ

$a = (b_1 \frown c_1) \cup (b_1 \frown c_2) \cup \cdots\cdots \cup (b_i \frown c_j) \cup \cdots\cdots$
$\cup (b_r \frown c_s)$ ナルaノ直和分解ガ成立スル事デアル。

(証明)　(十分)

$a = (b_1 \frown c_1) \cup (b_1 \frown c_2) \cup \cdots\cdots \cup (b_r \frown c_s)$ ガ直和分解トスル。

$b_i \geq (b_i \frown c_1) \cup \cdots\cdots \cup (b_i \frown c_s)$

$c_j \geq (c_j \frown b_1) \cup \cdots\cdots \cup (c_j \frown b_r)$

故ニ次元ヲ考ヘレバ上ノ仮定カラ、コノ二式デ等号ガ成立ツ事ガ分ル。即チ. $b_i \frown c_j$ ヲ*Faktor*　トスル上ノaノ直和分解ハ (1),(2) ノ共通ノ *Verfeinerung* デアル。

(必要)　$a = d_1 \cup d_2 \cup \cdots\cdots \cup d_t$ ナル (1),(2) ノ共通ノ *Verfeine*-

$rung$ が存在シタトスル。

$$b_i = \alpha = \alpha_{\nu_1} \cup \cdots\cdots \cup \alpha_{\nu_k}$$

$$c_j = \alpha_{\mu_1} \cup \cdots\cdots \cup \alpha_{\mu_l}$$

トシ、ソノ共通ノ Faktor ヲ $\alpha_{\rho_1}, \cdots\cdots, \alpha_{\rho_n}$ トスレバ、明ニ

$$\alpha_{\rho_1} \cup \alpha_{\rho_2} \cup \cdots\cdots \cup \alpha_{\rho_n} = b_i \frown c_j \text{ デアル。}$$

b_i ノ各 Faktor α_ν ハ仮定ニヨリ或 c_j ノ Faktor ニナッテヰル故

$$b_i \leqq (b_i \frown c_1) \cup \cdots\cdots \cup (b_i \frown c_s)$$

逆ノ不等号ハ明ニ成立スル故

$$b_i = (b_i \frown c_1) \cup \cdots\cdots \cup (b_i \frown c_s)$$

且 $b_i \frown c_j \leqq c_j$ ナル故コレハ b_i ノ直和分解デアル。

故ニ $\mathfrak{a} = (b_1 \frown c_1) \cup (b_1 \frown c_2) \cup \cdots\cdots \cup (b_r \frown c_s)$ ハ直和分解デアル。 （証終）

〔定理11〕 $\mathfrak{a} = b_1 \cup \cdots\cdots \cup b_r \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

$$= c_1 \cup \cdots\cdots \cup c_s \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

ナル二ツノ直和分解ニ対応スル n.End ヲ夫々 $\beta_1, \cdots\cdots, \beta_r$; $\gamma_1, \cdots, \gamma_s$ トスレバ　上ノ二ツニ対シ共通ノ Verfeinerung が存在スルタメノ完全條件ハ

$$\mathfrak{a}\cdot\beta_i\gamma_j = \mathfrak{a}\cdot\gamma_j\beta_i \text{ ナル事デアル。}$$

（証明）（十分）

$\mathfrak{a}\cdot\beta_i\gamma_j = \mathfrak{a}\cdot\gamma_j\beta_i$ トスル。

$\{\beta_i\gamma_j \mid i = 1, \cdots\cdots, r;\ j = 1, \cdots\cdots s\}$ ナル $\mathfrak{a}$ ノ n.End ノ System ハ（定理4'）ノ三條件ヲ充タス。

(1) ハ明

(2') $\mathfrak{a}\cdot\beta_i\gamma_j\beta_i\gamma_j = \mathfrak{a}\cdot\gamma_j\beta_i\gamma_j = \mathfrak{a}\cdot\beta_i\gamma_j$

又 $i \neq k$ ナラバ，$\mathfrak{a}\cdot\beta_i\gamma_j\beta_k\gamma_l = \mathfrak{a}\cdot\gamma_j\beta_i\beta_k\gamma_l = 0$

$i = k$, $j \neq l$ ナレバ

$$\mathfrak{a}\cdot\beta_i\gamma_j\beta_i\gamma_l = \mathfrak{a}\cdot\gamma_j\beta_i\gamma_l = \mathfrak{a}\cdot\beta_i\gamma_j\gamma_l = 0$$

故ニ (2') ガイヘタ。

(3) $a(\sum_{i,j}\beta_i\gamma_j)=a(\beta_i+\cdots+\beta_i)\gamma_1\cup\cdots\cup a(\beta_i+\cdots+\beta_r)\gamma_s=a$

故ニコノSystemニ対応シテ

$a=a\beta_1\gamma_1\cup a\beta_1\gamma_2\cup\cdots\cup a\beta_r\gamma_s$ナル直和分解ガ出来ル。

$a\beta_i=a(\gamma_1+\cdots+\gamma_s)\beta_i=a\gamma_1\beta_i\cup\cdots\cup a\gamma_s\beta_i$
$=a\cdot\beta_i\gamma_1\cup\cdots\cup a\beta_i\gamma_s$

ナル故　コレハ(1)ノVerfeinerung：同様ニ(2)ノVerfeinerung

デアル事モイヘル。

(必要)　(1)(2)ガ共通ノVerfeinerungヲモツトスレバ

定理10ニ由リ $a=(b_1\cap c_1)\cup(b_1\cap c_2)\cup\cdots\cup(b_r\cap c_s)$ナ

ル直和分解ガ成立スル。

明ニ　$b_i=a\cdot\beta_i=(b_i\cap c_1)\cup(b_i\cap c_2)\cup\cdots\cup(b_i\cap c_s)$

$\therefore a\cdot\beta_i\gamma_j=b_i\gamma_j=b_i\cap c_j$

同様ニ $a\gamma_j\beta_i=c_j\cap\beta_i$　故ニ $a\cdot\beta_i\gamma_j=a\cdot\gamma_j\beta_i$ デアル。

(証明終)

〔定理12〕　$a=b_1\cup b_2\cup\cdots$ ノ b_rナル直和分解ガ他ノ任意ノ直和分解ニ對シ共通ノVerfeinerungヲモツタメノ完全條件ハ $\gamma^2=\gamma$ ナル a ノ n.End. γ ニ對シ、常ニ $b_i\gamma\leqq b_i$ ナル事デアル。

(証明)

(十分)　各 b_i ガ定理ノ條件ヲ充タストスル

$a=b_1\cup b_2\cup\cdots\cup b_r\cdots\cdots(1)$

$a=c_1\cup c_2\cup\cdots\cup c_s\cdots\cdots(2)$

(2)ヲ(1)以外ノ或直和分解トシ、(1)、(2)ニ對應シ夫々

$\beta_1,\cdots\beta_r$; $\gamma_1,\cdots,\gamma_s$ ナル n.End. アルトスル。

$a=a\cdot(\beta_1+\cdots+\beta_r)(\gamma_1+\cdots+\gamma_s)$

$=a\cdot\beta_1\gamma_1\cup a\cdot\beta_1\gamma_2\cup\cdots\cup a\cdot\beta_i\gamma_j\cup\cdots\cup a\beta_r\gamma_s\cdots(3)$

定理ノ仮定ニ由リ

$a\cdot\beta_i\gamma_1\cup a\beta_i\gamma_2\cup\cdots\cup a\beta_i\gamma_s\leqq a\cdot\beta_i$

故ニ次元ヲ考ヘレバ

$a\cdot\beta_i=a\cdot\beta_i\gamma_1\cup a\cdot\beta_i\gamma_2\cup\cdots\cup a\cdot\beta_i\gamma_s$

且コレハ直和分解デアル。

ヨツテ(3)ハ a ノ直和分解デアリ、更ニ(1)ノVerfeinerung

デアル。スレ・$\gamma_0 = a\cdot(\beta_1+\cdots\cdots+\beta_r)\gamma_j = a\cdot\beta_1\gamma_j \cup$
$\cup a\beta_r\gamma_j$ ナル故 (3)ハ(2)ノ Verfeinerung デモアル。
即チ(1),(2)ノ共通ノ Verfeinerung ノ存在ガイヘタ。

(必要) γ ヲ $\gamma^2 = \gamma$ ナル a ノ n. End. トスル。

定理5ニ由リ $a = a\cdot\gamma \cup a_\gamma$ ナル直和分解ガ成立スル。(ココデ a_γ ハ γ ニ對応スル $[0, a]$ ノ元トスル)

$a = b_1 \cup \cdots\cdots \cup b_r$ ガコレト共通ノ Verfeinerung ヲモツ事ヨリ $b_i = (b_i \cap a\cdot\gamma) \cup (b_i \cap a_\gamma)$ ナル直和分解ガ存在スル事ガ分ル。

γ ニヨリ $[0, a]$ ハ $[0, a\cdot\gamma]$ ノ上ニ寫像サレル故

$x \in [0, a\cdot\gamma]$ ナラバ $\exists y \in [0, a] : y\cdot\gamma = x$

$\therefore\ x\cdot\gamma = y\cdot\gamma^2 = y\cdot\gamma = x$ デアル.

$\therefore\ b_i\cdot\gamma = (b_i \cap a\cdot\gamma)\cdot\gamma = b_i$

ヨッテ定理ノ條件ガ必要ナル事ガイヘタ。　　(証終)

[定理13]

$a = b_1 \cup b_2 \cup \cdots\cdots \cup b_r$ ガ a ノ唯一ツノ直既約分解ナルタメノ完全條件ハ $\gamma^2 = \gamma$ ナル a ノ任意ノ n. End. γ ニ對シ $b_i\cdot\gamma \leq b_i$ ナル事デアル。

(証明) $a = b_1 \cup b_2 \cup \cdots\cdots \cup b_r$ ナル直既約分解ガ唯一ツノ直既約分解ナルタメノ完全條件ハ他ノ任意ノ直和分解ト共通ノ Verfeinerung ヲモツ事デアル。ヨッテ定理12ヨリコノ定理ハ明デアル。

(証終)

1947. 2. 12