28. 壬生雅道氏ヨリ吉田耕作氏ヘノ手紙

（名大）

locally bicompact group ノ構造論ヲヤルトキノ例ノ重要ナ Lemma ノ証明ガ実ハ無限積空間ヲ考ヘルコトニヨリ非常ニ簡単ニ出来ルコトガ分リマシタ。（separability ヲ除イタトキノ直接証明デス）

Lemma　G ヲ locally bicompact，connected + abel 群デ bicompact デハナイトシマス。$\bar{U}$ ガ bicompact デアルヨウナ G ノ eins ノ symmetric ノ近傍ヲ U トスレバ、U ノ boundary $U' = \bar{U} - U$ ノ点 α ニシテ $n\alpha \in U \rightleftarrows n = 0$ ナル $\alpha \in U'$ ガ存在スル。

$\boxed{\text{証 明}}$　$U_1 = U$ トオキマス

一般ニ　(1)　$U_{n+1} = U_n + U_1$　トシマスト次ノ関係式ノ成立スルコトハ容易ニ分リマス。

(2)　$U_r + U_s = U_{r+s}$

(3)　$\bar{U}_r + \bar{U}_s = \bar{U}_{r+s}$

次ニ　(4)　$U'_n = \bar{U}_n - U_n$　（ココノ－ハ集合トシテノ引キ算デス）

トオケバ　$U'_n \neq 0$　ナルコトハ明白デス。

更ニ次ノ関係式ガ成立シマス。

(5)　$U_r + \bar{U}_s = U_{r+s}$

関係式 (3) カラ　$C \in U_n$　トスレバ

(6) $C = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$ ナル形ニ書キ表スコトガ出来マス。

$d_i \in \overline{U}_1 \quad i = 1, 2, \cdots n$ （ 実ハ $d_i \in U'_1 \; i = 1, 2 \cdots$）

關係式(5)ガアルタメ $d_i \in U'_1 \; i = 1, 2 \cdots n$ ナルコトガスグ分リマス。

コヽマデハ Pontrjagin ノ本ト全ジコトデスカラ次ニ U'_1 即チ U' ヲ G ノ部分空間ト考ヘレバ bicompact space ニナリマスガ今 U' ノ可附番無限積空間 Ω ヲ考ヘマス，即チ

(7) $\Omega = U' \times U' \times U' \times \cdots\cdots$

U' ガ bicompact デスカラ Ω モ bicompact Ω ノ点 x ト云フノハ $x = (a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots) \quad a_i \in U' \quad i = 1, 2, \cdots\cdots$

今 Ω ノ部分集合デ次ノ如キモノヲ考ヘマス。

$$F_n = \{ x = (a_1, a_2, a_3 \cdots\cdots) ; a_1 + a_2 + \cdots + a_n \in U'_n \}$$

$F_n \neq 0$ ナルコトハ $U'_n \neq 0$ ト(6)カラ明白デス。F_n ガ閉集合ナルコトモ容易ニ分リマス。關係式(5)ヲ用フレバ(6)ニ於テ

$d_1 + d_2 + \cdots\cdots + d_{n-1} \in U'_{n-1}$ ナルコトガ分ルノデ

$F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq \cdots$ トナツテイマス。

$\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq 0$ ニゾクスル一点 $y = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n \cdots)$ ヲトツテキマスト

任意ノ n ニ対シテ $d_1 + d_2 + \cdots + d_n \in U'_n$ ナルコトハ明白デスガ更ニ関係式(5)ヲ用フレバ任意ノ相異ナル自然数ノ系列 $m_1, m_2 \cdots m_r$ ニ対シテ

(8) $d_{m_1} + d_{m_2} + \cdots\cdots + d_{m_r} \in U'_r$ ナルコトガ分リマス。

集合 $\{d_1, d_2 \cdots\cdots\}$ ニ相等シイモノガ無数ニアレバソノ一ツヲ d トシ然ラザレバ $\{d_1, d_2 \cdots\}$ ノ集合点ノ一ツヲ d トスレバ関係式(8)ヨリ $nd \in U'_n$ ガ容易ニ分リマスカラ $nd \in U \rightleftarrows n = 0$ ナルコトガ容易ニ分リ d ハ求ムルモノトナリマス。

Haar measure ノ両側 invariant ナルタメノ條件ニ就テ次ノ結果ヲ得マシタ，以後群ハ凡テ locally bicompact ナル

モノト仮定シテオキマス。ナホ Haar measure ト云フノハ小平サンニ従ツテ左ニ invariant ナ測度ヲサスモノトシテオキマス。

【定理 1.】 0-dimentional ナ群ノ Haar measure ハ両側 invariant

【定理 2.】 eins ノ component ガ bicompact ナ群ノ Haar measure ハ両側不変.

【定理 3.】 Z ヲ群 G ノ zentrum ニ含マレル任意ノ部分群トシマス：G ノ Haar measure ガ両側不変ナルタメノ必要充分條件ハ G/Z ノ Haar measure ガ両側不変ナルコトデス。

（前ニ後藤君ガ G ガリー群デ Z ガ zentrum ナルトキ G/Z ガ両側不変ナ Haar measure ヲ持テバ G ノ Haar measure ガ両側不変ナルコトヲリー群ノ定理ヲ用ヒテ証明シマシタガ、実ハ G ガリー群デアル必要ハナク、一般ノ群デ成立スルコトガ上ノ定理ノ一部分トシテ含マレテイルワケデス。更ニ G/Z ノ Haar measure ガ両側不変ナルコトガ G ノ Haar measure ノ両側不変ナルタメノ必要條件デモアルワケデス）

【定理 4.】 H ヲ群 G ノ任意ノ bicompact normal subgroup トシマス。G ノ Haar 測度ガ両側不変ナルタメノ必要充分條件ハ G/H ノ Haar measure ガ両側不変ナルコトデス。

（系 1） bicompact ナ normal subgroup デ割ツタ群ニ両側不変ナ距離ガ入レバ、モトノ群ノ Haar measure ハ両側不変デス。

（系 2） bicompact ナ normal subgroup デ割ツタ群ガ discrete ナラモトノ群ノ Haar measure ハ両側不変デス。

【定理 5】 D ヲ群 G ノ任意ノ discrete ナ normal subgroup トシマス。G ノ Haar 測度ガ両側不変ナルタメノ必要充分條件ハ G/D ノ Haar measure ガ両

側不変ナルコトデス。

（系）群G ノ discrete ナ normal subgroup D ガアッテ、G/D ガ bicompact ナラG ノ Haar measure ハ両側不変デス

（実ハ定理 3. 4. 5 ヲ一績ニヒックルメテ更ニ比事ヨリ精密ニ次ノ定理ガ成立シマスガ、先ヅ定義カラハジメマス）。

定義 1. 群G ノ要素 a ガG ノ任意ノ部分集合A ニ対シテ aA，ト Aa ノ Haar measure ガ等シイトキ、要素 a ノコトヲ、不変要素ト云フコトニシマス。言ヒ変ヘレバ右カラカケテヤツテモ measure ガ変ラナイ要素ノコトデス。a ガ不変要素ナラ a^{-1} モ不変要素ナルコトハ容易。

【定理 6】群G ノ normal subgroup N ガアルトシマス。若シN ガ (1) G ノ zentrum ニ含マレルカ。或ヒハ (2) bicompact デアルカ、或ヒハ (3) discrete デアルカ、

以上イヅレカノ場合ニハG ノ任意要素 a ガ不変要素デアルタメノ必要充分條件ハ a ヲ G/N ノ要素ト考ヘタトキ a ガ G/N ノ不変要素デアルコトデス。

（系 1） 群G ノ任意ノ bicompact ナ normal subgroup ノ element ハ凡テ不変要素デス。

（系 2） 群G ノ任意ノ discrete ナ normal subgroup ノ element ハ凡テ不変要素デス。

（不変要素ニ就テハ定理 6 ノ系 1 ヨリ更ニ精密ナコトガ云ヘマス）

定義 2 群G ノ要素 a ガアリ集合 $\{a, a^2, a^3, \cdots a^n, \cdots\}$ ガ totally bounded ナルトキ要素 a ノコトヲ 有界要素 ト云フコトニシマス。

a ガ有界要素ナルトキ a^{-1} ガ有界要素ナルコトハスグ云ヘマス。

【定理 7】 群G ノ要素 a ガ有界要素ナラ a ハ不変要素デス。従ッテG ノ任意ノ bicompact subgroup（normal デアル必要ハアリマセン）ノ要素ハ凡テ不変要素デス。

【定理 8】 群G ノ normal subgroup N ガアリ、N ノ

Haar measure（一般ニ両側不変ナラズ）ト G/N ノ Haar measure（之モ両側不変トハ限ラナイ）カラ G ノ Haar measure ヲ作ルコトが出来マス。

大体ノ idear ハ次ノヨウデス。G ノ任意ノ部分集合 A ニ対シテアル方法デ G/N ノ上デ定義サレタ函数 $f_A(x)$ ヲ対応サセ．$f_A(x)$ ヲ G/N ノ Haar measure デ積分シタモノヲ A ノ測度トスルコトニヨリ G ノ Haar measure が得ラレマス。集合 A ニ $f_A(x)$ ヲ対応サセルトキニ N ノ Haar measure ヲ用ヒマス。此ノトキ一番ノ難関ハ A が如何ナル集合ノトキ $f_A(x)$ が可測ニナルカト云フトコロデスが、幸ヒ A が開集合ナルトキ $f_A(x)$ が下半連続ナルコトが証明サレマス。

最後ノ定理（定理ト云フノハオカシイデスが）8 が出発点トナッテ他ノ定理 1 カラ 6 マデハ互ヒニ関联シテイマスが定理ツダケハ之等ト independent デ其ノ証明ハ trivial デス。

定理 4 ノ系 1 ノ逆が云ヘタラ面白イト思ヒマス。即チ G ノ Haar measure が両側不変ナラ適当ナ bicompact normal subgroup N デ G ヲ割レバ G/N ニ両側不変ナ距離が入ル。然シコレハドウモアヤシイト思ヒマス。

定理 6 ハモット精密ノコトが云ヘマス。a ヲ G ノ任意ノ要素トシタトキ、G ノ任意ノ部分集合 A ニ対シ $\ell(a)\cdot m^*(A) = m^*(Aa)$（$\ell(a)$ ハ a ニ depend シタ常数）ナル関係がアリマス。

a ヲ G/N ノ要素ト考ヘタトキ之ヲ a^* ト書クコトニシマスト、実ハ $\ell(a)=\ell(a^*)$ ナルコトが云ヘマス。

$\ell(a)=1$ ナルコトが a が G ノ不変要素ト云フコトデ $\ell(a^*)=1$ ナルコトが a^* が G/N ノ不変要素即チ a ヲ G/N ノ要素ト考ヘタトキ不変要素トナルコトデスカラ、$\underline{\ell(a)=\ell(a^*)}$ ナル関係ハ定理 6 ヨリクワシイト云ヘマス。

群 G ノ normal subgroup N がアタヘラレテイルトシマス。N ノ任意ノ要素 $a\in N$ ニ対シテ、実数 $\overline{\ell}(a)$ が定マリ、$m^*(Aa) = \overline{\ell}(a)\cdot m^*(A)$ が成立シマス。但シ A ハ N ノ任意ノ部分集合ニシ

テ m^* ハNノ Haar measure デス・Gノ Haar measure μ^* ニ対シテモ全様ニ実数 $l(a)$ ガ定マリ． $\alpha^*(B_a) = l(a)\cdot\alpha^*(B)$ ガGノ任意ノ部分集合Bニ対シテ成立シマス，ソウスルト次ノ定理ガ成立シマス。

【定理９】 任意ノ $a \in N$ ニ対シテ $l(a) = l(a)$

（系１） 群Gノ Haar measure ガ両側不変ナラGノ任意ノ normal subgroup ノ Haar measure モ両側不変デス。

（系２） 群Gノ要素ニシテ右カラ掛ケテヤッテモ Haar measure ガ変ラナイヨウナ要素全体 $H = \{a ; l(a) = 1\}$ ハGノ normal subgroup ニナッテ両側不変ナ Haar measure ヲ持ツヨウナモノハ凡テHニ含マレテシマヒマス。従ッテGノ如何ナル bicompact ナ normal subgroup モ又如何ナル discrete ナ normal subgroup Hニ含マレマス，

尚Gノ zentrum 及ビ commutator ガHニ含マレルコトハ明白デス。

Gノ任意ノ bicompact subgroup（必ズシモ normal デアル必要ハアリマセン）ガHニ含マレルコトハ定理7ニ示サレテイマス。

定理９ノ系１ヲ更ニ精密ニ出来ルカドウカ、例ヘバGノ Haar measure ガ両側不変ナラGノ如何ナル subgroup モ両側不変ナ Haar measure ヲ有スル ヨウナ事ガ云ヘルカドウカ僕ニハ分リマセン。

又Gヲ任意ノ normal subgroup Nデ割ッタ G/N ノ Haar measure ガ常ニ両側不変カドウカモ分リマセン。

定理４ノ系１ノ逆、即チGノ Haar measure ガ両側不変ナラ適当ナ bicompact normal subgroup NデGヲ割レバ G/N ニ両側不変ナ距離ガ入ルト云フコトガドウモ云ヘソウナ気モシマス。小平サンノ論文ヲ見テ測度ガアタヘラレタトキ位相ヲ導入スルトコロヲ吟味スレバ測度ノ両側不変性ガアレバ位相ノホウニドウ云フ影響ヲ

アタヘルカガ分ルカモ知レマセン。

（系 3） 任意ノ群Gハ適当ナ normal subgroup Nヲ持ツ．テクレバ G/N モNモ共ニ両側不変ナル Haar measure ヲ有スルヨウニ出来ル。（実ハ G/N ハ両側不変ナ Haar measure ヲ有スルバカリデナク abel 群ニスルコトガ出来マス）

【定理 10】 群Gノ不変要素全体ノ集合ヲ $H = \{a ; l(a) = 1\}$ トシマス，若シ $\overline{\overline{G}} > \aleph_0$ ナラ $\overline{\overline{H}} > \aleph_0$ デス。

【定理 11】 Hヲ定理 10 ニ於ケルHトシマス・若シGガ connected ナラ $G = H$カ．サモナケレバ G/H ハ実数ノ群ト isomorph デス。 （1947. 1. 27 受付）