27. Complex-Banach space ニ於ケル解析函数ニツイテ (II)

霜田伊左衛 (阪大)

多変数函数論ニ於ケル Hartogs ノ定理ヲアル條件ノモトニ Complex Banach space ニ拡張シタイ。其ノ為ニ必要ナル定理ヲ A.E.Taylor 氏ノ論文[1]カラ掲載スル事ニシマス。C ヲ complex plane, E, E' ヲ夫々 complex-Banach space トスルトキ

定理 A $|\alpha|<R$, $\|x\|<S$ デ定義セラレタ E' ノ値ヲトル函数 $f(\alpha,x)$ ガ各ノ変数ニ関シテ regular デアレバ $0<R_1<R$ ナル任意ノ R_1 ニ対シテ $\|x\|<S$ 内ニアル open set O ガ存在シ $|\alpha|<R_1$, O デ $f(\alpha,x)$ ハ regular トナル。

Lemma. $f(\alpha,x)$ ハ $|\alpha|<R$, $\|x\|<S$ ニ於テ各変数ニ関シテ regular 且 $|\alpha|<R$, $\|x\|<s\,(<S)$ デ regular ナレバ $f(\alpha,x)$ ハ $|\alpha|<R$, $\|x\|<S$ デ regular デアル。

証明 $f(\alpha,x)$ ハ $|\alpha|<R$, $\|x\|<s$ デ regular ナル故

$$f(\alpha,x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(\alpha,x) \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ナル巾級数ニ展開セラレル。コヽニ $f_n(\alpha,x)$ ハ $|\alpha|<R$, $\|x\|<\infty$ デ連続デ α ニツキ regular デ且 x ニツキ n 次ノ Homogeneous Polynomial デアル。今 $R_1<R$ ヲ任意ニトレバ $|\alpha|\leqq R_1$ ナルトキ (1) ハ $\|x\|<s$ 内ノ任意ノ

compact set ヲ x ガ変ズルトキ (1) ハ一様收斂スル。故ニ

$$\sup_{G\in K} \overline{\lim} \sqrt[n]{\sup_{x\in G,\ |\alpha|\leq R_1} \| h_n(\alpha, x)\|} = \frac{1}{s} \quad {}^{2)}-$$

故ニ任意ノ正数 ε ニ対シ $s-\varepsilon=s_0$ トスレバ $n_0(s_0)$ ガ定マリ

$$\| h_n(\alpha, x)\| \leq \frac{1}{s_0^n}. \quad \text{-------------}(2)$$

但シ $n \geq n_0(s_0)$, $|\alpha| \leq R_1$, $x \in G$ (G ハ K ノ任意ノ element)

又 (1) ハ α ヲ fix スレバ x ニツキ $\|x\|<S$ デ regular ナル故 α ヲ fix スレバ

$$\sup_{G\in K} \overline{\lim} \sqrt[n]{\sup_{x\in G} \| h_n(\alpha, x)\|} \leq \frac{1}{S}$$

乃チ、任意ノ ε ニ対シ $S-\varepsilon=S_1$ トオケバ $n_1(\alpha, S_1)$ ガ定マリ

$$\| h_n(\alpha, x)\| = \frac{1}{S_1^n} \quad \text{----------}(3)$$

但シ $n \geqq n_1(\alpha, S_1)$, $x \in G$ (G ハ K ノ任意ノ element)

今 $E[y \mid y=S_1 x,\ x\in G] = G'$ トオケバ G' ニ於テハ(2)ヨリ

$$\| h_n(\alpha, y)\| \leq \left(\frac{S_1}{s_0}\right)^n$$

$$\frac{1}{n} \log \| h_n(\alpha, y)\| \leq \log \frac{S_1}{s_0} \quad (n \geq n_0,\ |\alpha|=R_1) \text{--}(4)$$

又 (3) ヨリ $\frac{1}{n} \log \| h_n(\alpha, y)\| \leq 0 \quad (n \geq n_1(\alpha, S_1))$ ----- (5)

然ルニ $\frac{1}{n} \log \| h_n(\alpha, y)\|$ ハ y ヲ fix シタトキ $|\alpha| \leq R_1$ 上デ最大値ハ必ズ $|\alpha|=R_1$ 上デトル、何故ナレバ若シ $|\alpha_0|<R_1$ デ最大値ヲトツタトスレバ $0<\rho<R_1-|\alpha_0|$ ナル任意ノ ρ ニ対シテ $0 \leq \theta < 2\pi$ ナルトキ

$$\frac{1}{n} \log \| h_n(\alpha_0, y)\| \geq \frac{1}{n} \log \| h_n(\alpha_0+\rho e^{i\theta}, y)\|$$

$$\therefore \| h_n(\alpha_0, y)\| \geq \| h_n(\alpha_0+\rho e^{i\theta}, y)\|$$

$h_n(\alpha, y)$ ガ常数デナケレバ アル ρ ニ於テ

$$\| h_n(\alpha_0, y)\| > \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \| h_n(\alpha_0+\rho e^{i\theta}, y)\| \, d\theta.$$

ト $h_n(\alpha, y)$ ハ α ニツキ regular デアルカラ

$$h_n(\alpha_0, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h_n(\alpha_0+\rho e^{i\theta}, y)\, d\theta.$$

$$\therefore \| h_n(\alpha_0, y)\| < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \| h_n(\alpha_0+\rho e^{i\theta}, y)\| \, d\theta.$$

之ハ不合理デアル。

今 $U_n(\alpha, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{n}\log^+ \| h_n(R_1 e^{i\theta}, y)\| \frac{R_1^2 - r^2}{R_1^2 - 2R_1 r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\, d\theta.$

トオケバ $U_n(\alpha, y)$ ハ $|\alpha| < R_1$ デ調和デ $U_n(R_1 e^{i\theta}, y) = \frac{1}{n}\log^+ \| h_n(R_1 e^{i\theta}, y)\|$

$$\therefore \frac{1}{n}\log \| h_n(\alpha, y)\| - U_n(\alpha, y) \le 0 \quad (|\alpha| = R_1)$$

$\frac{1}{n}\log \| h_n(\alpha, y)\|$ ハ常数カ又ハ境界デ最大値ヲトル函数デアルカラ，常ニ $\frac{1}{n}\log \| h_n(\alpha, y)\| - U_n(\alpha, y) \le 0 \quad (|\alpha| \le R_1) \cdots\cdots(6)$

一方 $U_n(\alpha, y) \le \frac{R_1 - r}{R_1 + r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{n}\log^+ \| h_n(R_1 e^{i\theta}, y)\|\, d\theta.$

(4).(5) ヨリ Lebesgue ノ定理ニヨリ

$$\varlimsup_{n\to\infty} U_n(\alpha, y) \le \frac{R_1 - r}{R_1 + r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log^+ \| h_n(R_1 e^{i\theta}, y)\|\, d\theta.$$

$$= 0$$

今 $0 < R_0 < R_1$ ナル R_0 ヲ任意ニトレバ $U_n(\alpha, y) < \varepsilon$，$(n \ge n_1,\ |\alpha| \le R_0)$

(6) ヨリ $\| h_n(\alpha, y)\| < (e^{\varepsilon})^n$

$$\therefore \sqrt[n]{\sup_{x\in G,\ |\alpha|\le R_0} \| h_n(\alpha, x)\|} \le e^{\varepsilon}\cdot \frac{1}{S_1}$$

G ハ任意デアルカラ $\sup_{\xi\in K} \varlimsup \sqrt{\sup_{x\in G,\ |\alpha|\le R_0} \| h_n(\alpha, x)\|} \le \frac{1}{S_1}$

乃チ $\sum_{0}^{\infty} h_n(\alpha, x)$ ハ $|\alpha| \leq R_0$, $\|x\| < S_1$ 内ノ任意ノ compact set, デ一様收斂スルカラソコデ正則ニナル。R_0, S_1 ハ夫々 R, S ニ如何程近クトモ良イカラ, $f(\alpha, x)$ ハ $|\alpha| < R$, $\|x\| < S$ デ regular デアル。

$\boxed{\text{定理 1}}$ $C \times E$ 内ノ任意ノ domain D デ定義セラレ, E' ノ値ヲトル函数 $f(\alpha, x)$ ガ各ノ変数ニ関シテ regular ナルトキ $f(\alpha, x)$ ハ D デ regular デアル。

$\boxed{\text{証明}}$ D 内ノ任意ノ点 P ノ近傍デ正則ナレバヨイ。一般性ヲ失ハズニ P ヲ O 点ニトル。$R > 0$, $S > 0$ ヲ適当ニトレバ $|\alpha| < R$, $\|x\| < S$ ハ D ニ含マレル。$f(\alpha, x)$ ハ此所デ各ノ変数ニ関シテ regular デアルカラ. 定理 A ニヨリ任意ノ $R_1 < R$ ニ対シテ $\|x\| < \frac{1}{3} S$ 内ニ open set $\mathfrak{O}$ ガ存在シテ $f(\alpha, x)$ ハ $|\alpha| < R_1$, $x \in \mathfrak{O}$ デ regular ニナル。$\mathfrak{O}$ ニ含マレル $\|x_1 - x\| < S_1$, $x_1 \in \mathfrak{O}$ ヲトレバ $f(\alpha, x)$ ハ $|\alpha| < R_1$, $\|x_1 - x\| < S_1$ デ regular デ α ヲ fix スレバ x ニ関シテハ $\|x_1 - x\| < \frac{2}{3} S$ デ regular デアルカラ Lemma ニヨリ $f(\alpha, x)$ ハ $|\alpha| < R_1$ $\|x\| < \frac{1}{3} S$ デ regular トナル。依ツテ $f(\alpha, x)$ ハ D デ regular トナル。（以上）

此ノ定理ノ一応用トシテ次ノ場合ヲ考フ。E デ定義セラレ E' ノ値ヲトル函数ノ folge $f_n(x)$ ヲ component トシ E'' ノ値ヲトル函数 $f(x)$ ヲ考ヘル, 乃チ $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots\cdots)$ 又

$$\|f(x)\| = \sqrt[p]{\sum_{1}^{\infty} \|f_n(x)\|^p} \quad \text{デ定義スル。}$$

次ニ $C \times E$ デ定義セシ E'' ノ値ヲトル函数

$$F(\zeta, x) = \sum_{1}^{\infty} f_n(x) \zeta^n$$

ヲ定義スル。

$\boxed{\text{定理 2}}$ $f(x)$ ガ E ノ domain D デ regular ナル為ノ條件ハ

i) $f(x)$ ガ strongly continuous

ii) $F(z, x)$ ガ $|z|<1$, $x \in D$ デ regular

$\boxed{証明}$ i) $f(x)$ ガ regular ナレバ i) ハ当然満足サレテキル。x ヲ fix スレバ $f(x)$ ハ一定ナル故ニ $\sqrt[p]{\sum \|f_n(x)\|^p} < \infty$.

$$\therefore \quad \left\| \sum_n^m f_n(x) z^n \right\| \le \sqrt[p]{\left(\sum_n^m \|f_n(x)\|^p\right)\left(\sum_n^m |z|^{pn}\right)}$$

$$\le \frac{1}{\sqrt[p]{1-|z|^p}} \sqrt[p]{\sum_n^m \|f_n(x)\|^p} < \varepsilon$$

但シ $m > n > n_0(\varepsilon, x)$, $|z| < \rho < 1$.

乃チ $\sum f_n(x) z^n$ ハ一様収斂スルカラ z ニツキ regular デアル。$\rho < 1$ デ ρ ハ任意ダカラ $F(z, x)$ ハ x ヲ fix スレバ z ニツキ $|z| < 1$ デ regular トナル。次ニ z ヲ $|z|<1$ ニ fix スル。$f(x)$ ガ regular ナレバ $f_n(x)$ ハ又 regular デアル[3]

$$\left\| \sum_n^m f_n(x) z^n \right\| \le \|f(x)\| \frac{|z|^n}{\sqrt[p]{1-|z|^p}}$$

D 内ノ任意ノ compact set ヲ G トスレバ i) ニヨリ $\|f(x)\| < M_G$ ナル M_G ガ存在スル。$\therefore$ $m, n \ge n_1(\varepsilon)$ ナルトキ $|z| < 1$ ナル故

$$\left\| \sum_n^m f_n(x) z^n \right\| < \varepsilon.$$

乃チ $\sum f_n(x) z^n$ ハ D ノ任意ノ compact set デ一様収斂スル。故ニ D ニ於テ $F(z, x)$ ハ x ニツキ regular デアル。故ニ定理 1 ニヨリ $|z|<1$, $x \in D$ デ $F(z, x)$ ハ regular トナル。

ii) 逆ニ $F(z, x)$ ガ regular デアルトスル。

$$F(z, x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) z^n$$

$f_n(x)$ ハ D デ regular トナル。又 $f(x)$ ハ連続 $f(x)$ ハ regular トナル[1]

---

1). A. E. Taylor ; On the properties of analytic function in abstract space, Math. Ann. 115 (1938).

2)、本紙第一号、拙著、complex-Banach space ニ於ケルワ級数ニツイテ参照。

3)、昨年十月当地数学談話会ニ於テ井関君ノ発表シタ定理。

（1947. 1. 24 受付）