24. 一般化サレタ Flow ニ就イテ.

松下眞一（九大）

（1）

測度空間（Ω. $\mathfrak{B}$. $\mathfrak{m}$）ノ上デ定義サレタ保測変換ノ group トシテノ（普通ノ意味ノ.）Flow ニ対シテハ、ソノ ergodic parts ヘノ分解問題ハ J. v Neumann. Krylof-Bogoliou-bogoff ナドニヨッテ為サレ、測度空間ノカハリニ Boole 代数ノ上デノ同ジ事ヲ河田一岩村氏ガ研究サレタ事ガアル。

然シ此処デハ Boole 代数ノ上ノ変換ノツクル Semi-group ニマデ拡張シテ考ヘルハスルト Birkhoff ガ注意シタ様ニ Markoff process ガツクル semi-group ノ特殊ナ場合トナリ、Yosida-Kakutani 或ヘ Doeblin ナドノ得タ結果ニ相当スルモノガ得ラレルノデアル。

（2）

先ヅ σ− 完備ナ Boole 代数 $\mathfrak{U}$ トソノ上デ定義サレタ join-homomorphism ノツクル semi-group $\mathfrak{S}$ トガアリ、且ツ $\sigma \in \mathfrak{S}$ ニ対シ、$a \in \mathfrak{U}$ ガ

$$a \longrightarrow a^{\sigma} \in \mathfrak{U}$$

ナル如ク対応ヅケラレテヰルトキ、a, $b \in \mathfrak{U}$ ニ対シ

$$(a, b)^{\sigma} \subset a^{\sigma}, b^{\sigma}.$$

$$0^{\sigma} = 0 \text{ , 而モ } a^{\sigma} = 0 \text{ ナラバ } a = 0$$

$$(a^{\sigma})' \subset (a')^{\sigma} \quad ; \text{ 但シ } a' \text{ ハ } a \text{ ノ complement}$$

ヲ満足スルモノトスル。カヽル $\mathfrak{S}$ ヲ $\mathfrak{U}$ ノ上ノ（一般化サレタ意味

デノ）Flow トエフ。特ニ S ガ group ヲ為ス場合ヲ狭義ノ Flow トエフ。

サテ $\mathfrak{S}$ ノ S ニヨル核心、即チ總テノ $\sigma\in S$ ニ対シ $a^\sigma=a$ ナル如キ $\mathfrak{S}$ ノ要素ノ全体ヲ $\mathfrak{S}_{\mathfrak{Z}}$、又（$S$ ガ unit ヲ有スルトキハ unit デナイ）總テノ $\sigma\in S$ ニ対シテ $a^\sigma\subset a$ ナル如キ a ノ全体ヲ $\mathfrak{S}_{\mathfrak{J}}$ トスレバ、明ラカニ

$$\mathfrak{S}\supset\mathfrak{S}_{\mathfrak{J}}\supset\mathfrak{S}_{\mathfrak{Z}}$$

デアル。今 $\mathfrak{S}_{\mathfrak{Z}}$ ノ要素ニシテ $x\subset a$、且ツ $x\in\mathfrak{S}_{\mathfrak{J}}-\mathfrak{S}_{\mathfrak{Z}}$ ナル如キ x ノ存在シナイ様ナ a ノ全体ヲ $\mathfrak{B}$ トスレバ、

Lemma 1　$\mathfrak{B}$ ハ generalized Boolean algebra デアル。又 $\mathfrak{S}$ 及ビ $\mathfrak{B}$ ノ maximal ideal 全体ノ集合ヲ夫々 $[\mathfrak{S}]$、$[\mathfrak{B}]$ ト書クコトニスル。猶以下ニ於テハ $\mathfrak{B}$ ガ Boolean algebra ヲ為ス場合ヲ考ヘ、ソノ unit ヲ $E_{\mathfrak{B}}$ トシヨウ。

Lemma 2. $[\mathfrak{S}]$ ノ要素ハ少クトモ一ツ $[\mathfrak{B}]$ ノ要素ヲ含ミ、若シソレガ $\mathfrak{B}$ 全体ヲ含ムノデナケレバ、ソレハ $[\mathfrak{B}]$ ノ要素ヲ唯一ツシカ含マナイ。

其處デ $[\mathfrak{S}]$ ノ要素デ $\mathfrak{B}$ 全体ヲ含ムモノノ總テヲ $[\mathfrak{S}]_{\mathfrak{D}}$ トシ、サウデナイモノノ全体ヲ $[\mathfrak{S}]_{\mathfrak{E}}$ トスレバ Lemma 2 ヨリ、$[\mathfrak{S}]_{\mathfrak{E}}$ ハソレガ含ム $[\mathfrak{B}]$ ノ要素ニヨリ

$$[\mathfrak{S}]_{\mathfrak{E}}=\sum_{u\in[\mathfrak{B}]}^{\oplus}[\mathfrak{S}]_u$$

ナル如ク直和ニ分解サレル。(*)

(3)

サテ近藤教授ノ作用素環ノ可約性ニ関スル論文(**)ノ方法ト analogy ニ次ノ様ニ考ヘテユク。即チ $x\in\mathfrak{S}$ ナルトキ、x ヲ含マナイ $[\mathfrak{S}]$ ノ要素ノ全体ヲ $[x]$ ト書イテカカル $[x]$ ノ全体ヲ $\tilde{\mathfrak{S}}$ トスレバ、$\tilde{\mathfrak{S}}$ ハ $\mathfrak{S}$ ノ representation ヲナス。サテ

$$[x+y]=[x]\vee[y]\qquad [x\cdot y]=[x]\wedge[y]$$

$$[0]=0\ ,\ [E]=[\mathfrak{S}]$$、但シ E ハ $\mathfrak{S}$ ノ unit デアル。

又 $[\mathfrak{B}]-[x]=[x]'$ ト定義スレバ．容易ニ解ル如ク

$$[x'] \subset [x]'$$

猶 $x\subset y$ ナラバ $[x]\subset[y]$ 且ツ $[a]=0$ ナラバ $a=0$ デアル。ソコデ

Lemma 3 $\quad [x]=[y] \Longleftrightarrow x=y$

$[\mathfrak{B}]$ ノ分解ニ対応シテ $\tilde{\mathfrak{B}}$ ノ要素モ亦直和ニ分シ

$$\begin{cases}[x]=[x]_D+[x]_E & \text{且ツ}\\ [x]_E=\sum\limits_{\iota\in[B]}^{\oplus}[x]_\iota\end{cases}$$

但シ $[x]$ ノ分解ノ各項ノ中ニハ勿論 0 ニナルモノモアル。$[x]_D\ (x\in\mathfrak{B})$ ノ全体ヲ $\tilde{\mathfrak{B}}_D$，$[x]_\iota$ ノ全体ヲ $\tilde{\mathfrak{B}}_\iota$ トスレバ：ソレラハ $\tilde{\mathfrak{B}}$ ニ含マレル Boole 代数デアル。此処ニ於テ $[x^\sigma]=U^\sigma[x]$，$U^\sigma[x]_*=U^\sigma_*[x]_*$（但シ $*$ ハ文字 D, E, 及ビ $\iota\in[B]$ ヲ代表スル）ト定義スレバ，U^σ ハ S ヨリ induce サレタ $\tilde{\mathfrak{B}}$ ノ上ノ isomorphism デ，$[\mathfrak{B}]$ ノ分解ニ対応シテ

$$\begin{cases}U^\sigma=U^\sigma_D+U^\sigma_E, & U^\sigma_E=\sum\limits_{\iota\in[B]}^{\oplus}U^\sigma_\iota \quad (\sigma\in S)\\ U^\sigma_\iota\cdot U^\rho_\mu=U^\rho_\mu\cdot U^\sigma_\iota=0, & U^\rho_D\cdot U^\sigma_\iota=0 \quad (\sigma,\rho\in S,\ \mu\neq\iota)\end{cases}$$

ガ成立スル。

Definition; Boole 代数 $\mathfrak{B}$ ト ソノ上ノ Flow S ガアル場合，総テノ $\sigma\in S$ ニ対シ $a^\sigma\subset a$ ナル如キ要素ガ $\mathfrak{B}$ ノ unit 及ビ 0 以外ニ存シナイトキ，S ハ $\mathfrak{B}$ ノ上デ ergodic デアルト云フ。勿論 S ガ $\mathfrak{B}$ ノ上デ ergodic ナラバ，E ヲ $\mathfrak{B}$ ノ unit トスルトキ，$E^\sigma=E$ 且ツ $0^\sigma=0$ $(\sigma\in S)$ ガ成立シテ居ル。

Theorem 1. 任意ノ $\iota\in[B]$ ニ対シ U^σ_ι $(\sigma\in S)$ ノ全体ハ $\tilde{\mathfrak{B}}_\iota$ ノ上ノ Flow トナリ，且ツ其処デ ergodic デアル。又 U^σ_D ハソレガ ergodic トナル様ナ如何ナル Boole 代数ヲモ持タナイ。

コノ theorem ノ証明ノタメニ次ノ Remark ヲ記シテ置ク。E_B 及ビ E'_B ノ $\mathfrak{B}$ ニ於ケル principal ideal ヲ夫々 $\mathfrak{P}(E_B)$，$\mathfrak{P}(E'_B)$

トスレバ、明ラカニ、

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{p}(E_B) \vee \mathfrak{p}(E_B')$$

デ且ツ $x \in \mathfrak{C}$, $x \wedge \mathfrak{p}(E_B) = x_{\mathcal{E}}$, $x \wedge \mathfrak{p}(E_B') = x_{\mathcal{D}}$ トスレバ $[x_{\mathcal{E}}]_{\mathcal{D}} = [x_{\mathcal{D}}]_{\mathcal{E}} = 0$ デアルカラ. $[x] = [x_{\mathcal{D}}]_{\mathcal{D}} \oplus [x_{\mathcal{E}}]_{\mathcal{E}}$ トナリ $\mathrm{U}^{\sigma}_{\mathcal{E}}[x]_{\mathcal{E}} = \mathrm{U}^{\sigma}_{\mathcal{E}}[x_{\mathcal{E}}]_{\mathcal{E}} \in [x_{\mathcal{E}}]_{\mathcal{E}} = [x]_{\mathcal{E}}$ デアル。

(4)

次ニSトシテ σ ナル唯一ツノ元ヨリ生成サレル cyclic semi-group S_0 ヲトラウ。コノ場合ハ丁度 Markoff process ニ当ルワケデアル。スルト

Theorem 2

i) 総テノ $\alpha \in \widetilde{\mathfrak{C}}_{\mathcal{D}}$ ニ対シ、ソレガ適当ニ直和 $\alpha = \alpha_1 \oplus \alpha_2$ (α_1, $\alpha_2 > 0$) ニ分解サレテ、如何ナル $\sigma \in S_0$ ニ対シテモ $\alpha_1 \cap \mathrm{U}^{\sigma}_{\mathcal{D}} \alpha_2 = 0$ デアル。

ii) 総テノ $\alpha \in \widetilde{\mathfrak{C}}_{\mathcal{E}}$ ニ対シ、如何ナル直和分解 $\alpha = \alpha_1 \oplus \alpha_2$ (α_1, $\alpha_2 > 0$) ニ対シテモ適当ナル $\sigma \in S_0$ ガ存在シテ $\alpha_1 \cap \mathrm{U}^{\sigma}_{\mathcal{E}} \alpha_2 > 0$ トナル。

(但シ以上ニ於ケル notation $>$ ハ $\supset$ 且ツ$\neq$ナルコトヲ示ス。)

又特ニSガ group G デアル場合、$X \subset \mathfrak{C}$ ニ対シテ $X^{\sigma} = E_{\sigma}(x^{\sigma} | x \in X)$ ト定義スレバ $\mathrm{U}^{\sigma}[x] = [x]^{\sigma}$ トナリ、U^{σ} ハ実際ニ各要素ノSニヨル変換ト一致シテ來ル。コノ場合 Definition ノ中ノ $\alpha^{\sigma} \subset \alpha$ ナル條件ハ $\alpha^{\sigma} = \alpha$ トナル。ソレハ各 $\sigma \in G$ ニ対シテ σ ノ inverse ガ存在スルカラデアリ、從ツテコノ場合ニ $[\mathfrak{C}]_{\mathcal{D}}$ ハ存在シナイ。

[註]

* $[\mathfrak{C}]_{\mathcal{D}}$ ヲ $[\mathfrak{C}]$ ノ dissipative part, $[\mathfrak{C}]_{\mathcal{E}}$ ヲ $[\mathfrak{C}]$ ノ ergodic part ト呼ブコトニシヨウ。

** M. Kondô ; Sur la réductibilité des anneaux des opérateurs, Proc. Imp. Vol. XX (1944).

(1947. I. 7 受付)