23. Lie 環ノ同型表現ニツイテ

岩澤健吉 (東大)

Fヲ任意ノ可換体，LヲF上ノLie 環，Aヲ同ジクF上ノ普通ノassociative ナ環トスル．但シL．AノF上ノrank ハ ∞ デモヨイ，LカラAノ中ヘノ写像

$$a \longrightarrow a' \quad ; \quad a \in L, \quad a' \in A$$

ガ次ノ條件ヲ満足スルトキコレヲLノAニ於ケル表現ト呼ブ：即チ

$$\lambda a + \mu b \longrightarrow \lambda a' + \mu b'$$

$$[a, b] \longrightarrow [a', b'] = a'b' - b'a', \quad (\lambda, \mu \in F).$$

対応ガ特ニ1対1ノ場合，即チ同型表現ニ関シテハWitt，Birkhoff Ado，Cartan 等ノ結果ガ知ラレテヰル[1)]。以下コレラノ定理ニ代数的ナ別証ヲ与ヘ特ニAdo．Cartan ノ結果ヲ任意ノ係数体Fノ場合ニ拡張スルコトヲ述ベル，

サテLヲF上ノ任意ノLie環，NヲLノabelian idealトセヨ。コノトキ同ジクF上ノLie 環 L^* ガ

i) L^* ハL及ビabelian ideal N^* ヲ含ミ

ii) $L^* = L + N^*$，$L \cap N^* = N$，従ッテ $L^*/N^* \cong L/N$ 且

iii) L^* ハ N^* 上ニsplit (zerfällen) スル．即チ L^* ハ

$$L^* = L_1 + N^*, \quad L_1 \cap N^* = 0$$

ナル如キ部分環 L_1 ヲ含ム

トキ L^* ヲ拡大 L/N ノsplitting Lie algebra ト呼ブ。コレハ普通ノ群論ニ於ケルE．Artin ノZerfällungsgruppe ノ定義ヲソノママLie環論ノ言葉デ云ヒ直シタマデデアル。サウシテ群論ノ場合ニ於ケルト同様ニ次ノ定理ガ成立スル。

定理 1. 任意ノL及ビソノabelian ideal N ニ対シ上ノ如キsplitting Lie algebra L^* ガ存在スル。

定理 2. 特ニLガF上ニ有限ノrank ヲ有スル場合ニハ同ジクF上ニ有限ノrank ヲ有スル L^* ガ存在スル。

コノ定理1、2ガ實ハ証明ノ essential ナ点ナノデアルガソレハ後ニ説明スルコトニシテ先ヅコノ二ツノ定理ヲ仮定スレバ初メニ述ベタLie環ノ表現ノ問題ガ容易ニ解決サレルコトヲ示サウ。

サテN^*ヲF上ノ任意ノ linear space、N^*ニ於ケル linear transformation ノ全体ヲTトスル。Tモ又F上ノ linear space デアルカラN^*トTトノ linear space トシテノ直和ヲ

$$A = T + N^*$$

トスル。コノAノ元

$$u_1 = (\sigma_1, v_1);\quad u_2 = (\sigma_2, v_2);\quad \sigma_i \in T,\ v_i \in N^*$$

ノ間ニ乗法$u_1 \cdot u_2$ヲ

$$u_1 u_2 = (\sigma_1 \sigma_2,\ \sigma_1(v_2))$$

ニヨリ定義スル。但シ$\sigma_1 \sigma_2$ハ linear transformation トシテノ乗法，又$\sigma_1(v_2)$ハσ_1ニヨルv_2ノ写像デアル。カクノ如キ定義ニヨリAガF上ノ associative ナ環トナルコトハ容易ニ確メルコトガ出来ル，実際N^*ガF上ニ有限ノ rank lヲ有スル場合σ，vヲソレゾレ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1l} \\ \vdots & & \\ a_{l1} & \cdots & a_{ll} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_l \end{pmatrix} \quad a_{ij} \in F,\ v_i \in F$$

ナル matrix 及ビ vector デ表セバ上ノAハ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1l} & v_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{l1} & \cdots & a_{ll} & v_l \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ナル$l+1$次ノ正方行列ガ行列ノ普通ノ加法、乗法ニ関シテツクル環ニ他ナラナイ。

今F上ノ任意ノLie環Lヲトリソノ centre ヲZトセヨ

$$x \longrightarrow \Gamma(x)$$ ヲ L ノ正規表現

即チ

$$\Gamma(x) y = [x, y], \quad y \in L$$

トスレバコノ表現ニヨリ L/Z ハ isomorphe ニ表現サレル、$\Gamma(x)$ ガ generate スル F 上ノ associative ナ環ヲ B トセヨ.

次ニ $Z = N$ トシテ定理 1 ヲ用ヒレバ i), ii), iii) ヲ満足スル splitting Lie algebra L^* ガ存在スル。コヽデ $L_1 \cong L^*/N^* \cong L/N = L/Z$ デアルカラ L_1 ハ上記 B ノ中デ同型ニ表現サレル。一方 L_1 ノ任意ノ元 w ニ対シ

$$\sigma(w) v = [w, v], \quad v \in N^*$$

トオケバ $\sigma(w)$ ハ N^* ノ linear transformation ヲ与ヘルガ

$$w \longrightarrow \sigma(w)$$

ハ明カニ L_1 ノ T（コノ T ハ上ニ述ベタ N^* ノ linear transformation ノ全体ノツクル環）ニ於ケル表現ヲ与ヘル。即チ

$$\sigma([w, w']) = \sigma(w)\sigma(w') - \sigma(w')\sigma(w)$$

ソコデ今 $L^* = L_1 + N^*$ カラ $A = T + N^*$ ヘノ写像

$$a = w + v \longrightarrow (\sigma(w), v) \quad w \in L_1 \quad v \in N^*$$

ヲ考ヘヨ。コレハ明カニ F 上ノ linear ナ対応デアルガ N^* ガ abelian ナルコトニ注意スレバ

$$\begin{aligned}[u_1, u_2] &= [w_1 + v_1, w_2 + v_2] = [w_1, w_2] + [w_1, v_2] \\ &\quad + [v_1, w_2] + [v_1, v_2] \\ &= [w_1, w_2] + \sigma(w_1) v_2 - \sigma(w_2) v_1\end{aligned}$$

ニハ A ノ元

$$\begin{aligned}&(\sigma([w_1, w_2]), \sigma(w_1) v_2 - \sigma(w_2) v_1) \\ &= (\sigma(w_1)\sigma(w_2) - \sigma(w_2)\sigma(w_1), \sigma(w_1) v_2 - \sigma(w_2) v_1) \\ &= (\sigma(w_1)\sigma(w_2), \sigma(w_1) v_2) - (\sigma(w_2)\sigma(w_1), \sigma(w_2) v_1) \\ &= (\sigma(w_1), v_1)(\sigma(w_2), v_2) - (\sigma(w_2), v_2)(\sigma(w_1), v_1)\end{aligned}$$

ガ対応スルカラ、カクシテ Lie 環 L^* ノ A ニ於ケル表現ガ得ラレル。

コレト先ニ得タ L_1 ノ B ニ於ケル表現トヲ組合セレバ L^* ノ直和 A＋B ニ於ケル表現ガ得ラレルガコノ表現ハシカモ同型表現デアル。何トナレバ B 内ニ於ケル表現ニ於テハ L_1 ガ同型ニ表現セラレ A 内ニ於ケル表現ニ於テハ N^* ガ同型ニ表現サレテヰルカラ．以上ノ所論ハ先ニ述ベタ如ク matrix ヲ書イテ見ルト明白デアル。トニカクコレニヨリ次ノ定理ヲ得ル；

定理 3.（Witt－Birkhoff）F 上ノ任意ノ Lie 環 L ハ適当ナ associative ナ環ノ中デ同型ニ表現サレル．

コレ迄ハ定理 1 ダケシカ用ヒナカツタガ定理 2 ヲモ用ヒルコトニスレバ L ガ F 上ニ有限ノ rank ヲ有スル場合ニハ特ニ L^* トシテ同ジク F 上ニ有限ノ rank ヲ有スルモノガトレルカラ上ノ A，B，Ṫ 等モ又凡テ F 上ニ有限ノ rank ヲ有スル。ヨツテ

定理 4. F 上ニ有限ノ rank ヲ有スル任意ノ Lie 環 L ハ同ジク F 上ニ有限ノ rank ヲ有スル associative ナ環ノ中デ同型ニ表現サレル，特ニソレハ F 上ノ matrix デ同型表現ガ出来ル。

コレハ Ado－Cartan ノ定理ノ任意ノ係数体トニ於ケル場合ヘノ拡張デアル（尤モ characteristic 0 ノ場合ハ essential ハ Ado－Cartan ノ定理デ書キテヰルワケデアルガ）

カクシテ問題ハ結局定理 1、2 ヲ証明スルコトニ帰着スル。定理 1 ガ成立スルコトハ H. Zassenhaus[2] ガ既ニ注意シテヰル。実際ソレハ Lie 環ノ拡大ニ関スル factor set ノ理論（安倍亮氏；本紙上談話会 226（1941））ヲ用ヒレバ群論ノ場合ト同様ニ比較的 formal ナ計算ダケデ証明サレル。然シソレカラ直チニ定理 2 ヲ導クト云フワケニハ行カナイ，ソレハ丁度 Witt－Birkhoff ノ結果カラ直チニ Ado－Cartan ノ定理ガ出テ来ナイノト同様デアル。

定理 2 ノ証明ヲ詳シク述ベルコトハ長クナルカラ止メニシテ以下ソノ方針ダケヲ略述スル。先ヅ与ヘラレタ F 上ニ有限ノ rank ヲ有スル L，N ニ対シ定理 1 ニヨリ splitting Lie algebra L_0 及ビソノ abelian ideal N_0 ヲツクル，コヽデモシ L_0 内ニ

$$N_0 \geqq M_0,\ [N_0 : M_0]^{3)} < \infty,\ M_0 \cap N = 0$$

ナル條件ヲ滿足スル L_0 ノ ideal M_0 ガ存在スルコトガ云ヘレバ $L^* = L_0/M_0$ トオクコトニヨリ定理２ガ成立スルコトガ容易ニワカル[4]。コノ樣ナ M_0 ノ存在ヲ證明スル爲ニ F ノ標數ガ０ノ場合ト $p \neq 0$ ノ場合トヲ分ケテ考ヘル。標數 p ノ場合ニハ先ヅ與ヘラレタ L ヲ L ヲ含ム適當ナ W デオキカヘテ容易ニ證明ガ出來ルガ標數０ノ時ニハ L ガ nilpotent ナ場合，soluble ナ場合，一般ノ場合ト三段ニ分ケテ證明シナケレバナラナイ。ソレハ Cartan ノ證明ニ於ケルト同樣デアル。（但シコヽデハ勿論全ク代數的ニ）　コヽデ Levi ノ定理ヤ semi-simple ナ Lie 環ノ表現論等ヲ用ヒネバナラヌノデアルガ尚コノ点ニツイテハモツト簡單ナ證明ガ出來ルノデハナイカト思ツテヰル。

トモカク上ノ如クニシテ M_0 ノ存在ガ云ヘテ定理２ガ證明サレル。定理２ハ定理４ノ證明ノ手段トシテバカリデナク、特ニ標數 P ノトキニハ標數０ノ場合ノ Levi ノ定理ノ代用トシテモ若干興味ガアルト思フ，實際標數 p ノトキニハ Levi ノ定理ニ相當スル定理ハ成立シナイノデアルガ定理２ヲ少シク一般化シテコレニ代用サセルコトガ出來ル。尚又定理２ヲ用ヒレバ標數 p ノ場合ニハ，semi-simple ナ Lie 環ノ表現デ completely reducible デナイモノガ存在スルコトナドモ云ヘル。コレラニツイテハ又後ニ述ベルコトヽスル。

註.

1) 後ニ述ベル定理 3, 4 參照．文献トシテハ例ヘバ Birkhoff (Ann. of Math. 38 (1937)) Cartan (Jour. de Math. 17 (1938)) 等

2) Zassenhaus (Hamb. Abh. 13 (1939))

3) $[N_0 : M_0]$ ハ N_0/M_0 ノ F 上ノ rank.

4) コノコトハ Witt-Birkhoff ノ定理カラ Ado-Cartan ノ結果ヲ導カウトスル場合デモ同樣デアル。但シソノ場合ニハ M_0 トシテハ associative ring ノ中ノ兩側 ideal ヲトラネ

バナラナイ。Lie環ノ中デハ ideal ハ必然的ニ凡テ両側 ideal デコノコトガ議論ヲ容易ニシテヰル様ニ思フ。

(1947. 1. 3 受付)