19. 等周問題雑題 (I)

寺阪英孝 (阪大)
(1946 XII 16 受付)

周ノ長サの與ヘラレタ平面図形ノ中デ円ガ最大ノ面積ヲ持ツ。トイフ等周問題ヲ説キ初メルノニ "Steiner ハ先ヅ同周ノ等積　　　ト切リ出スノハ余リニモ cogito ergo sum 式ナノデ,

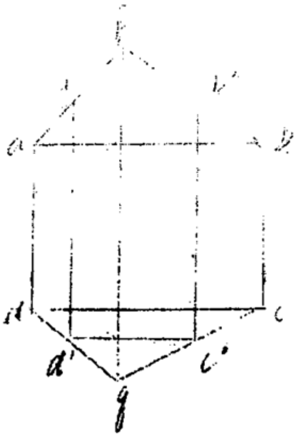
定理 内接平行四辺形ガ常ニ矩形トナルヨウナ卵形線ハ円デアル。

トイフコトヲ使ッテヤッタラドウカト思ヒツイタノデスガハニツノ定理ヲ文献デアハテ、探シ廻ッテモ素人ノカナシサーヲ見當リマセン。止ムヲ得ズ近クノ人ニモ考ヘテ頂イテ解クニハ解キマシタガ周知ノ証明ガ勿論アルコトト思ヒマス。御教示下サイ

次ニ説明ヲ述ヘマス。

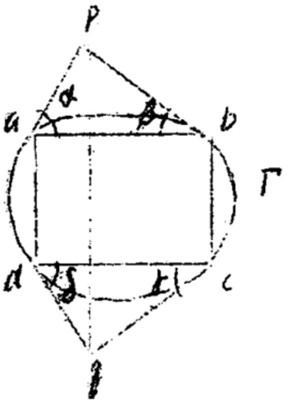
(i) 卵形ヨリ前ニ 連續閉曲線カラモ出発出来ルケレド 簡単ノタメ卵形線カラ初メル 定理ノ性質ヲ持ツ與ヘラレタ曲線ヲΓト名付ケヨウ

Γガ直線部分ヲ含メバ 矩形ナラザル平行四辺形ガ内接出来ルカラ 直線部分ハ含マナイ。



今 $abcd$ ガ内接矩形ナラ，ソレト辺ガ平行ナ矩形 $a'b'c'd'$ ヲ内接セシメ $a'b'c'd' \to abcd$ トスレバ，a, b, c, d ニ於ケル片側ノ切線ノ交点 p, q ヲ結ブ直線 pq ハ ad, bc ニ平行ナルコトガ分ル。

$$ad \parallel pq \parallel bc$$

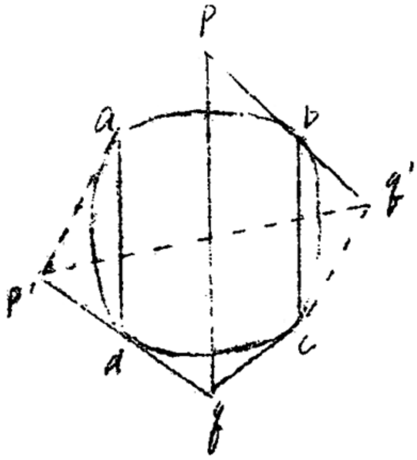


依ッテ図ノ如ク角 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ヲ定メルト

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{\tan\delta}{\tan\gamma}$$

トナル。

(ii) コレヲ用ヒルトΓハ各点ニ於テ切線ヲ有スル事ガ分ル，先ヅ a ヲ与ヘラレタΓ一ノ点トスル　Γハ卵形線故，高々可附番個ノ点ヲ除イテ切線ガアル。ソレ故 $ab \perp ad$ ナル b, d ヲ選ンデ，b, d ニハ切線ガアルヨウニ出来ル。矩形 $abcd$ ヲ追ッテ図ノ如ク片側ヅツノ切線ヲ引ケバ $pq \parallel ad$ 及ビ $p'q' \parallel ab$，コウナルノハ a, c ニ於イテ夫々両側ノ切線ガ一致スル場合ニ限ル。ヨッテ a ニハ切線ガ存在スル。（切線ノ存在ノ証明ハ角谷氏ニヨル。）



(iii) Γハ直線部分ヲ含マナイカラ，切点ハ切線ニ対シテ一ツニ極マリ，（但シ向キヲモ与ヘタトシテ）且切線ヲ $x\cos\theta + y\sin\theta = p(\theta)$ デ表ハセバ，相接立シタ切線ノ交点ノ極限トシテ切点ガ出ルカラ，ソノ通リニ計算テユクト $p(\theta)$ ノ

存在ガ分リ，同時ニ切点ヲ與ヘル式ハ

$$x = p(\theta)\cos\theta - p'(\theta)\sin\theta,$$
$$y = p(\theta)\sin\theta + p'(\theta)\cos\theta$$

ガ出ル。

(iv) 今一定方向ノ内接矩形ノ一辺ノ長サヲ0ニ近付ケルト，コノ矩形ハΓノ直径ニ近付ク。依ッテ任意ノ方向ニ二本ノ切線ヲ引ケバ，ソノ切点p, qヲ結ブ直線ハ切線ト直交スルコトニナル。今(iii)ノ式ニ於テ，θト$\theta+\pi$トニ対スルΓ上ノ点$p(x_1, y_1)$，$q(x_2, y_2)$ヲ結ブ直線ガ切線ニ垂直デアルトイフコトヲ式ニ書クト，

$$p'(\theta) + p'(\theta+\pi) = 0$$

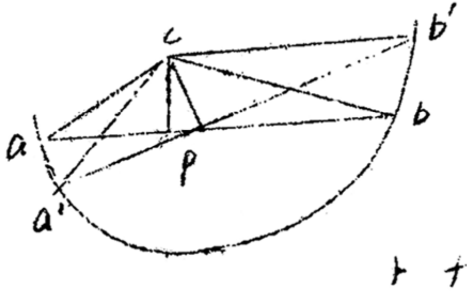
ガ得ラレ，従ッテ

$$p(\theta) + p(\theta+\pi) = \text{const.} = d$$

トナル。即チΓハトニカク定幅曲線デアル。

(v) 以上ノ準備ノモトニ証明ノ本體ニ入ル。

今直径dヨリ小サイ一定長ノ弦ヲΓ上ニ動カシ，ソノ包絡線ヲ考ヘテ見ル。マヅ弦abニ近ク弦$a'b'$ヲトリ$ab \equiv a'b'$トスル。aa'ノ垂直二等分線ト，bb'ノ垂直二等分線トノ交点ヲcトスレバ，



$$\triangle abc \equiv \triangle a'b'c'$$

依ッテcカラab, $a'b'$ヘノ垂線ハ等長デアル。ソレ故$ab \cap a'b' = p$トスレバ，cpハ$\angle apb$ノ二等分線トナル。今$a'b' \longrightarrow ab$トスレバ，cハa, bニ於ケルΓノ法線ノ交点nニ収斂シ，従ッテcpハnカラabヘ下シタ垂線nqニ収斂スル。依ッテq点ガ正ニabト包絡線トノ切点デアル

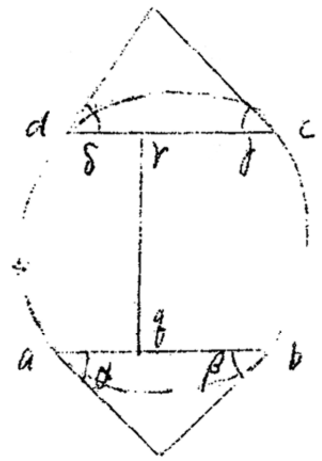
（コレハ平面ノ*cinématique*ノ理論カラ勿論周知デスガ，無闇ニ微分シタクナイノデ丁寧ニヤッタノデス。又包絡線トイフノハカカル隣接交点ノ極限qノ軌跡トイフ意味

ニトリ，必ズシモ切スルカドウカハ問ハナイ)

スルト 図ニ於テ

$$ag : bg = \tan\alpha : \tan\beta$$

トナル，



今 ab ト平行ナ等長弦 cd ニツイテモ包絡線トノ切点 r ヲ考ヘレバ同理ニヨリ

$$dr : cr = \tan\delta : \tan\gamma$$

スルト (i) ノ等式カラ

$$ag : bg = dr : cr$$

依ッテ gr ハ ab, cd ニ垂直デアル。

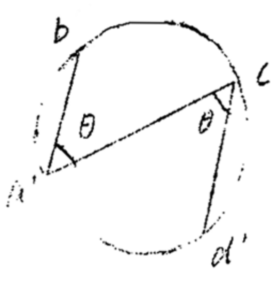
即チ定長弦ノ方程式ヲ

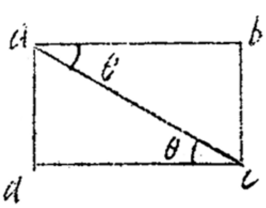
$$x\cos\theta + y\sin\theta = p(\theta)$$

トシテソノ包絡線ヲ求メタトスレバ ソノ平行ナニ切線ノ切点ヲ結ブ直線ガ切線ニ垂直トナッテ居ル訳デアル。コノ包絡線ハ卵形線カドウカハ分ラナイガコノ Sachverhalt ハ (iii), (iv) ニ於ケル事情ト全ク同一デアルカラ，従ッテコノニ平行切線間ノ幅ハ一定ダト云フコトニナル 云ヒ換ヘルト，

"Γニハ凡ユル方向ニ，互ニ合同ナ矩形ガ内接出来ル" トイフコトガ分ッタノデアルカラ，モウ求メタモノデアル。

(vi) アトハ証明ノ仕上ゲニ過ギナイ。先ヅ，内接矩形ノ対角線ハΓノ直径ニナル 何者 矩形ヲ $abcd$ トシ対角線 ac ト辺 ab トノナス角ヲ θ トショウ。今任意ニ直径 $a'c'$ ヲ引キ，コレト θ ニ等シイ角ヲナス弦 $a'b'$, $c'd'$ ヲ引ケバ，$a'b' \equiv c'd'$ デアッタトシテモ，$a'c'$ ヲ





等長 d ノマヽΓニクルクル廻シテ行ケバ，$a'b'$ ト $c'd'$ トハ入レ換リニナル筈故，何処カデ $a'b' \equiv c'd'$ トナル場所ガアル。ソノ位置ヲ特ニ $a''b''c''d''$ トスレバ コレハ矩形デアリ，

c'' ハ直径デアッテ且 $\angle bac$ ハ θ ニ等シイ。
(v) 結果ニヨレハ與ヘラレタ矩形 $abcd$ ト辺ガ平行デ $\angle abc$ ハ ト合同ナ矩形カ内接出来ル筈テアル テハ角 θ ノ関係カラコノ両者ハ一致セネバナラヌ。従ッテ lc ノ長サハ d ニ等シク，従ッテ ac ハ直径トナル

サテ今一直径 ab ヲキメテオク。Γ ハ a デ切線ヲモツカラ，a ヲ一端トスル直径ハ ab ノ外ニハナイ。

ソコデ今 c ヲ a, b 以外ノ Γ 上ノ点トシテ，ac ヲ一辺トスル矩形ヲ内接セシメレハ，a ヲ通ルコノ矩形ノ対角線ハ，a ニ於ケル Γ ノ直径デアリ，従ッテソレハ ab デナケレハナラヌ。即チ acb ハ直角 依ッテ Γ ハ ab ヲ直径トスル円周ト一致スル

— 以上 —