17 ~~13.~~ (1, 1, ⋯, 1) 型 Abel 群ノ subgroup ノ相互関係 (II)

木下信壽 (阪大)

(1946. XII. 10 受付)

order p^n ノ Abel 群 G ハ Type ガ $(1, 1, \cdots 1)$ デアルトヲ order p^{n-1} ノ subgroup ガ Matrix

$$\left(\begin{array}{c|c} E_i & 0 \\ \hline \lambda_1 \ \lambda_i & 0 \\ \hline 0 & E_{n-1-i} \end{array}\right)$$

[コレヲ ${}_n l_i(\lambda)$ トカク $n-(n-i)$ 型デアル]

$(i = 0, 1, 2, \cdots n)$

[i: $\kappa = 1$ ヌハ $n-1-i$ ニツキ, $\kappa = 0$ ノトキ, E_κ ノ位置スル κ 個ノ行及列ヲ抹消シテ出来タ Matrix ヲ意味スルモノトスル。例ヘバ, ${}_n l_0(\lambda)$ ハ $\begin{pmatrix} n \cdots 0 \\ E_{n-1} \end{pmatrix}$]

デキサレルコトハ、${}_n\mathfrak{A}_i(\lambda)$ ガ p^{n-1} 次ノ G subgroup ヘノ G ノ Bild デアルト共ニ、又 Abbildung ヲ兼マモノト考ヘラレル。従テ G ノ p^{n-2} 次ノスベテノ subgroup ヲ求メルニハ、${}_n\mathfrak{A}_i(\lambda) = {}_{n-1}\mathfrak{A}_j(\lambda)$ ヲ考察スレバ得ルコトガ出来ル。コノ考察ノ結果ハ次ノ通リ

$$\left[\begin{array}{c|c} E_i & 0 \\ \hline \lambda_1 \ \lambda_i & 0 \\ \hline 0 & E_{n-i-1} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} E_j & 0 \\ \hline \mu_1 \ \mu_j & 0 \\ \hline 0 & E_{n-j-2} \end{array}\right]$$

$$= \begin{cases} \left[\begin{array}{c|c|c} E_i & 0 & 0 \\ \hline \mu_1 \ \mu_i & 0 & 0 \\ \hline 0 & E_{i-j-1} & 0 \\ \hline \Lambda_1 \ \Lambda_j & \lambda_{j+2} \ \lambda_i & 0 \\ \hline 0 & 0 & E_{n-i-1} \end{array}\right] & i > j \qquad (i) \quad \begin{pmatrix} j = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n-2 \\ i = 1, 2, \cdots\cdots, n-1 \end{pmatrix} \\ \Lambda_k = \lambda_k + \mu_k \lambda_{j+1} & \\ \left[\begin{array}{ccc} E_i & 0 & 0 \\ \hline \lambda_1 \ \lambda_i & 0 & 0 \\ \hline 0 & E_{j-i} & 0 \\ \hline \mu_1 \ \mu_i & \mu_{i+1} \ \mu_j & 0 \\ \hline 0 & 0 & E_{n-j-2} \end{array}\right] & i \leqq j \qquad (ii) \quad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \cdots\cdots, n-2 \\ j = 0, 1, \cdots\cdots, n-2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

ニヨッテ p^{n-1} 次ノ subgroup ノ中ニアル p^{n-2} 次ノ subgroup ハ $p^{n-2} + p^{n-3} + \cdots + p + 1$ 個アルガ、次ノ二種ノ形ヲモッコトガ解ル。

(A) ${}_n\mathfrak{A}_i(\lambda)$ ニ含マレル subgroup

(i) ノ形ノモノガ $p^{i-1} + \cdots + p + 1$ 個 ; (i) デ μ ヲ任意ニエランデヨイ。(λ ハ given) ノデ、μ ヲ mod p ノ完全剰餘系ノ値ヲ與ヘテ p^i 個ノ group ヲ得ルガ、$i > j \geqq 0$, ($\underline{i \neq 0}$. $\underline{i = 0 \text{ ノトキハナシ}}$)

(ii) ノ形ノモノガ $p^{n-2} + \cdots\cdots + p^{i+1} + p^i$ 個 ; (ii) μ ニ mod p ノ値ヲ與ヘテ得ル。$i \leqq j \leqq n-2$

($i=0$ ノ場合ヲ含ム。)

コノ様ノ結果ヨリ subgroup ノ Hasse ノ Diagram ヲ書ク時上ヨリ下ヘノ線ガ引ケル. 次ニ下ヨリ上ヘノ線ノ引キ方ヲ考ヘル。

一ツノ order p^{n-2} ノ subgroup ノ形ハ次ノ如シ

$$(*)\quad \left[\begin{array}{c|c|c} E_k & 0 & 0 \\ \hline a_1 \cdots a_k & 0 & 0 \\ \hline 0 & E_{l-k} & 0 \\ \hline b_1 \cdots b_k & b_{k+1} \cdots b_l & 0 \\ \hline 0 & 0 & E_{n-l-2} \end{array}\right]$$

$k=0$, $l-k=0$, $l=n-2$ 等ノトキ E_0 ガ出レバソノ E_0 ノ位置スル行及列ヲ抹消シテ出来タ Matrix ヲ表ハスモノトスル 例ヘバ $k=l=0$ ノトキ $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ & E_{n-2} & \end{bmatrix}$ 之ヲ ${}_nl_{k,l}(a,b)$ トカク。

(B) ${}_nl_{k,l}(a,b)$ ヲ含ム subgroup

(B1) 之ガ(i)ノ本象ノ結果ナリトスレバ. $\mu_1=a_1$, $\mu_2=a_2$, $\cdots$ デ $k=j$, $\Lambda_1=b_1, \cdots \Lambda_k=b_k$, $\lambda_{k+2}=b_{k+1}, \cdots \lambda_i=b_l$ デ $i=l+1$, 即チ ${}_nl_{k,l}(a,b)$ ハ ${}_nl_{l+1}(\lambda)$ ノ subgroup デ λ ハ次ノ如シ

$$\lambda_1=b_1-a_1\lambda,\quad \lambda_2=b_2-a_2\lambda, \cdots \lambda_k=b_k-a_k\lambda,\quad \lambda_{k+1}=\lambda$$
$$\lambda_{k+2}=b_{k+1}, \cdots \lambda_{l+1}=b_l \quad (\lambda \text{ ハ mod } p \text{ ノ任意ノ値})$$

即チ ${}_nl_{k,l}(a,b)$ ハ p 個ノ (λ_i mod p), 斯ノ如キ ${}_nl_{l+1}(\lambda)$ ノ subgroup デアル。

(B2) (ii)ノ本象ノ結果得タ ${}_nl_{k,l}(a,b)$ ナリトスレバ. $\lambda_1=a_1$, $\lambda_2=a_2$, $\cdots$ デ $i=k$, $\mu_1=b_1$, $\mu_2=b_2, \cdots \mu_j=b_l$ デ $j=l$, 即チ ${}_nl_{k,l}(a,b)$ ハ ${}_nl_k(\lambda)$ ノ subgroup デ $\lambda_1=a_1, \cdots, \lambda_k=a_k$. 即チ斯ノ如キ1個ノ ${}_nl_k(\lambda)$ ノ subgroup デアル。

即チ

Satz 3. ${}_nl_i(\lambda)$ ノ subgroup ハ (i)(ii) ノ形デアル。

(*) ヲ subgroup トスル order p^{n-1} ノ subgroup ハ次ノ何レカノ形デアル。

$$\left[\begin{array}{c|c} E_{l+1} & 0 \\ \hline b_1-a_1\lambda, \cdots, b_k-a_k\lambda, \lambda, b_{k+1}, \cdots b_l & 0 \\ \hline 0 & E_{n-l-2} \end{array}\right] \quad 1\sim \quad 又ハ$$

(λ mod p ノ値)

$$\left[\begin{array}{cc|c} E_k & & 0 \\ \hline a_1 & a_k & 0 \\ \hline 0 & & E_{n-k-1}\end{array}\right]$$

コノ結果ヨリ，Hasse ノ diagram デ下ヨリ上ヘノ線ハ一ツノ subgroup ヨリ $p+1$ 個ヅヽノ線ガ出テ居ルコトガ分ル。コノ $p+1$ 個ノ線ニツキ次ノコトガイヘル。
記述ヲ簡単ニスルタメ次ノ言葉ヲ使フ。

Def. Hasse ノ diagram デ p^k 次ノ subgroup ヲ表ハス点ヲ k 点トイフ。アル k 点ニ含マレル $k-1$ 点ヲソノ k 点ノ<u>下ノ</u> $k-1$ 点，モトノ k 点ヲソノ $k-1$ 点ノ上ノ k 点ト呼ブ。

Satz 4. アル一ツノ $n-1$ 点 A ノ下ノ $n-2$ 点ヲスベテトリ，之ヲ $B_1, B_2, \cdots\cdots$ トスル時 $B_1, B_2, \cdots\cdots$ ノ上ノ $n-1$ 点ヲスベテトレバ之等ノ $n-1$ 点ハ A 以外ニ共通ノ点ナク，G ノスベテノ $n-1$ 点ハ之デ盡クサレル。

(証) 今 $n-1$ 点 A ガ $\left[\begin{array}{cc|c} E_i & & 0 \\ \hline \lambda_1 & \lambda_i & 0 \\ \hline 0 & & E_{n-i-1}\end{array}\right]$ デ表ハサレルトキ

ソノ下ノ $n-1$ 点ハ (i) 又ハ (ii) ノ何レカノ形デアル。
[(i) デハ $i > j$，(ii) デハ $i \leqq j$]
(ii) ノ形ナリトスレバコノ上ノ $n-1$ 点ハ (B1) 及 (B2) ヨリ

$$\left[\begin{array}{cc|c} E_i & & 0 \\ \hline \lambda_1 & \lambda_i & 0 \\ \hline 0 & & E_{n-i-1}\end{array}\right] \equiv A \text{ 又ハ } \left[\begin{array}{c|c} E_{j+1} & 0 \\ \hline \mu_1-\lambda_1 x \cdots \mu_i-\lambda_i x,\ x,\ \mu_{i+1} \cdots \mu_j & 0 \\ \hline & E_{n-j-2}\end{array}\right]$$

$$\equiv A_{j,x} \quad (i \leqq j)$$ ($i=j$ ノトキハ $\mu_{i+1} \cdots\cdots \mu_j$ ノ列ヲ消ス。x ハ mod p ノ値)

之等ニ点 A 以外ニ $A_{j,x}$ ノ間ニ共通ノモノヽナイコトハ同ジ j ノ値ニツキ $A_j x = A_j x'$ ナリトスレバ，
$\mu_1-\lambda_1 x \equiv \mu_1-\lambda_1 x' \cdots\cdots \mu_i-\lambda_i x \equiv \mu_i-\lambda_i x'$，$x \equiv x'$ ヨリ
明デアリ，異ル j ノ値 j, j' $(j<j')$ ニツキ $A_j x = A_{j'} x$

トスレバ、$A_{j}x$ ノ中ノ生成元 $\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ ($j+2$ 行) ガ A_{j}', x' ニ含マレテヰナイ(⊛)コトヨリ明デアル。

次ニ(ii)ノ形ナリトスレバ、コノ上ノ $n-1$ 点ハ(B1)及(B2)ヨリ

$$\begin{bmatrix} E_i & & & & 0 \\ \Lambda_1-\mu_1 x \cdots \Lambda_j-\mu_j x, & x, & \lambda_{j+2} & \lambda_i & 0 \\ & 0 & & & E_{n-i-1} \end{bmatrix} \equiv A^{\Lambda}_{i,x} \quad (i>j)$$

x i mod p

$(\Lambda_k = \lambda_k + \mu_k \lambda_{j+1})$

又ハ

$$\begin{bmatrix} E_j & 0 \\ \mu_1 \ \mu_j & 0 \\ 0 & E_{n-j-1} \end{bmatrix} \equiv A^{\mu}_{j} \qquad (i>j)$$

$i>j$ ダカラ之等ガ前ノ A_j, x ト共通ノモノナキコト明(§)ト比較シテ又 (i, j) ヲ交換シテ A_j ト $A_i x$ トノ間ニモ共通ノモノナク A_j^{μ} 同志ノ間ニモ各 μ ニ mod p ノ完全剰餘系ノ値ヲ與ヘレバ同ジモノナシ $A^{\Lambda}_{i,x}$ ノ間ニ(異ル又ハ同一ノ j ニツキ)同ジモノアレバ $\Lambda_s = \lambda_s + \mu_s \lambda_{j+1}$, $\Lambda_t' = \lambda_t + \mu_t' \lambda_{k+1}$ $(j<k)$ トスルトキ

$$\left\{\begin{aligned} \Lambda_1 - \mu_1 x &\equiv \Lambda_1' - \mu_1' x' \\ \Lambda_2 - \mu_2 x &\equiv \Lambda_2' - \mu_2' x' \\ &\vdots \\ \Lambda_j - \mu_j x &\equiv \Lambda_j' - \mu_j' x' \\ (§)\quad x &\equiv \Lambda_{j+1}' - \mu_{j+1}' x' \\ \lambda_{j+2} &\equiv \Lambda_{j+2}' - \mu_{j+2}' x' \\ &\vdots \\ \lambda_k &\equiv \Lambda_k' - \mu_k' x' \\ (\dagger)\quad \lambda_{k+1} &\equiv x' \\ \lambda_{k+2} &\equiv \lambda_{k+2} \\ &\vdots \\ \lambda_i &\equiv \lambda_i \end{aligned}\right.$$

即(†)ヨリ $x' = \lambda_{k+1}$

(§)ニ代入シテ

$x = \lambda_{j+1}$

即コノ合同式ハ

$\lambda_1 \equiv \lambda_1, \cdots ; \lambda_i \equiv \lambda_i$

トナリ $A^{\Lambda}_{i,x}$ ノ間ニ共通ノモノアレバ A ニ限ルコトヲ示ス。実際 $x = \lambda_{j+1}$ ニ対シテ A ガ共通ナモノナル事明。

以上ニヨリ $B_1, B_2, \cdots$ 等ノ各ノ上ノ $n-1$ 点ヲトレバ始メノ A 以外ニ共通ノ点ナシ。従テ $p^{n-2}+\cdots+p+1$ 個ノ各点ニツキ A 以外ニ新シキ $n-1$ 点ガ p 個ヅヽ出ルカラ（$B1$ 及 $B2$）計

$$p(p^{n-2}+\cdots+1)=p^{n-1}+\cdots+p$$

個ノ互ニ異ル B ノ上ノ $n-1$ 点ガ出ル。之ニ A ヲ加ヘテ $p^{n-1}+\cdots+p+1$ 個ノ $n-1$ 点ガ出ルガ之ハ $n-1$ 点ノ総数デアル。q. e. d.

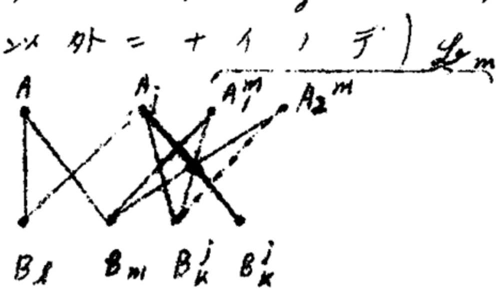
今述ベタ B_i ノ上ノ p 個ノ A 以外ノ $n-1$ 点ハ次ニ述ベル Satz 5 及 6 ノ意味ニ於テ組ヲ作ル。

Satz. 5　一ツノ $n-1$ 点 A ノ下ノ $n-2$ 点ヲ B_i $(i=1,2,\cdots,p^{n-2}+\cdots+p+1)$ トスル時各 B_i ノ上ノ $n-1$ 点ノ A 以外ノモノ p 個ノ集合ヲ $\mathfrak{L}_i$ トスル。任意ノ $n-1$ 点 A_j $(A_j\neq A)$ ヲトリ、其ノ下ノスベテノ $n-1$ 点ヲ B_k^j $(k=1,2,\cdots,p^{n-2}+\cdots+p+1)$ トスレバ

(イ)　B_i ト B_k^j トノ間ノ共通点ハ唯一ツ　コノ共通点ヲ B_l ト名付ケ $\mathfrak{L}_l$ ノ下ノ点トスル。

(ロ)　B_l 以外ノ一点 B_k^j ノ上ノ $n-1$ 点ハ A ト $\mathfrak{L}_l$ ヲ除イタ他ノ $\mathfrak{L}_i$ ノ各組ヨリ唯一ツヅヽ選ビ出シ、之ニ A_j ヲ加ヘルコトニヨリスベテ得ラレル。

（証）A_j ハ Satz 4 ニヨリアル i ニツキ B_i ノ上ニアル。今 B_l ノ上ニ A_j ガアルトスレバ (イ) ニヨリ B_i ト B_k^j トノ共通点ハ B_l デアル。今 A_j ガ更ニ B_s $(s\neq l)$ ノ上ニアルトスレバ、Satz 4 ニ反ス。（異ル B_i ノ上ノ共通点ハ A 以外ニナイノデ）　—(イ)ノ証終—



—(ロ)ノ証—　A_j ノ下ノ二点 $B_k^j, B_{k'}^j$ ガ $k\neq k'$ ノトキ同一ノ上ノ点ヲモタヌコトハ Satz 4 ヨリ明

次ニ A ノ下ノ点 B_m ノ上ノ点ノ集合 $\mathfrak{L}_m$ ノ点ヲ $A_1^m, A_2^m, \cdots, A_p^m$ トスルトキ A_j ノ下ノ点 B_k^j ガ A_1^m ノ下ノ点デアリ同時ニ A_2^m ノ下ノ点デアルトスレバ（図参照）、A_1^m ヲ Satz 4 ノ A トシテ考ヘレバ A_1^m ノ下ノ点 B_m, B_k^j ガソノ

上ノ点トシテ A_1^m ノミナラズ A_2^m ヲモツコトトナリ Satz 4 ニ反ス。即 B_k^j ハ各組 $\mathfrak{L}_m$ ヨリ少クトモ一点ノミヲソノ上ノ点トスル，且，仮設ヨリ A ノ下ノ点ハ B_i デ尽シテヰルカラ B_k^j ハ A ノ下ニナク又 $A_j \in \mathfrak{L}_l$ ヨリ B_k^j ハ $\mathfrak{L}_l$ ノ点ノ下ニナイ，($\mathfrak{L}_l$ ノ点ハ A_j ノ下ノ点 B_l ノ上ニアル) 従テ各 B_k^j ハ A ト $\mathfrak{L}_l$ ヲ除ク他ノ $\mathfrak{L}_i$ ノ各組ヨリ唯一ツヅツ選ンダ各点ノ下ニアル，

—(ロ)ノ証終—

(カヽル $\mathfrak{L}_i$ ノ組ノ数ハ $[p^{n-1}+p^{n-2}+\cdots+p+1-(p+1)] \div p = p^{n-2}+\cdots+p$)

Satz 6. $n-1$ 点 A ヲ不動ナラシメル G ノ Automorphismen = gruppe ノ automorphism ニヨリ起ル $n-1$ 点ノ間ノ permutation ニ於テ $\{\mathfrak{L}_i\}$ ハ一ツノ imprimitive ナ system ヲ作ル。

(証) A ヲ不変ナラシメル automorphism ($\mathfrak{U}$ ト呼ブ) ニヨリ A ノ下ノ点 $B_1, B_2, \cdots, B_{p^{n-2}+\cdots+p+1}$ ハ之等相互ノ間ノミデ permutation ガ行ハレ他ノ $n-2$ 点 B_k^j (前ノ Satz ノ記号襲用) ト之等ノ B_i トノ間ニ permutation ハ行ハレナイ。(若シ行ハレル時ハ A ハ不変デナイ A ノ下ノ $n-2$ 点ハ $\{B_i\}$ ソノ全部ナノデ) 従テ $\mathfrak{U}$ ニヨリ B_i ($i=1,2,\cdots,p^{n-2}+\cdots+p+1$) ガ不変ナラバ $\mathfrak{L}_i$ ノ $n-1$ 点ノミノ間ニ permutation ガ行ハレ B_i ガ B_j ニ permute サレル時ハ $\mathfrak{L}_i$ ノ $n-1$ 点ハ $\mathfrak{L}_j$ ノ $n-1$ 点全体ト permute サレル。即各 $\mathfrak{L}_i$ ハ $\mathfrak{U}$ ニヨル $n-1$ 点ノ permutation デーツノ imprimitive ナ system ヲ作ル。 q. e. d.

コノ Satz 6. ニヨリ アトデ報告スル様ニ G ノ Automorphismen = gruppe ノ Darstellung ヲ考ヘルコトガ出来ル。

扨 Hasse ノ diagram ヲ書ク(組立ヲ考ヘル)ニハ $n-1$ 点ト $n-2$ 点トノ上下ノ連結状態ガ Satz 3. 4. 5 ニヨリ分ルノデ之ヲ次々ニツギ合セテ行ケバヨイカ，一ツノ $n-1$ 点ノ下ノ $n-2$ 点ノ二ノ $n-1$ 点ノミデ $n-1$ 点ガ尽クサレルト云フ Satz 4 ニ相当シテ如何ナル $n-1$ 点ノ下ノ $n-2$ 点デスベテノ $n-2$ 点ガ尽クサレルカニツキ次ノコトガ云ヘル。蓋シ Abelian group ノ dualism ニヨリ G ノ $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ 点 ([ ] ハ gauss ノ記号) マデヲ書ケバアトハ ? 　同ノ形デ連結サレテヰル筈デアルカラ上ノ下ヲ

反對ニシタ事ヲ Satz 4 デ考ヘテオク必要ガアルノデアル。即,

次ノ $n-1$ 点ノ下ノ $n-2$ 点デスベテノ $n-2$ 点ハ盡サレル。($\mathfrak{A}_i(\lambda)$ トシテ $\lambda = \bmod p$ ノ値ヲ與ヘタスベテノ $\mathfrak{A}_i(\lambda)$ ヲトルトキ)

$$\mathfrak{A}_0(\lambda),\ \mathfrak{A}_1(\lambda),\ \cdots\ \mathfrak{A}_{n-2}(\lambda)$$

即下ニスヘテノ $n-2$ 点ヲモツ様ナ $n-1$ 点ノ組ハ他ニモトレルガ, $n-1$ 点ノ中 $\mathfrak{A}_{n-1}(\lambda)$ ヲ除イタモノデ盡クサレルノデアル。之ハ前ノ(ii)ヲ参照スレバスグ分ルコトデアル。

扨次ニ G ノ Automorphism ニヨル G ノ $n-1$ 点ノ permutation ヲ考ヘル。 (以下次回)