15　Banach space ニ於ケル解析的 operator ニ就テ

清水辰次郎（阪大）
（1946. XII. 9 受付）

$x, y, \cdots, a, b, \cdots$ 等ヲ Banach 空間ノ要素トシ、
$\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ 等ヲ複素数トスル（本誌二輯一号参照）
$\|x\| < R$ ニテ定義サレタ operator
$f(x)$ ガ次ノ條件ヲ満足スルトキ analytic operator ト云フ

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{f(x+\tau y)-f(x)}{\tau} = \delta f(x; y)$$

左辺ガ存在シ右辺ハ y ニ関シ一次ノ operator トス。
但シ $f(x)$ ノ連續性ヲ假定シナイ。
其時 $\|x\| < R' < R$ ニテ $f(x)$ ガ有界（$\|f(x)\| < M$ ナル M ノ存在スルコト）ナルトキ

$$f(x) = f(0) + f_1(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots$$

ガ $\|x\| < K \leqq R'$ ニテ一様収斂ナル K ガ定マル（コノ K ニ関シテハ、本誌二輯一号　霜田著ノ論文参照）
$f_1, f_2 \cdots\cdots$ ハ夫々一次、二次、$\cdots\cdots$、ノ齊次多項式 operator デアル。
依ツテ $\|x\| < K$ ナル x ニ対シ $f_n(x)$ ノ積分表示即チ

$$\delta^n f\left(x, \frac{y}{\|y\|}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f\left(x+\alpha \frac{y}{\|y\|}\right)}{\alpha^{n+1}}\,d\alpha$$

ヨリ　$\|\delta^n f(x, y)\| \leq \frac{M_x\|y\|^n}{r^n}$

依ツテ　$\|f(x) - f(0)\| \leq M_0 \frac{\|x\|}{r}\left(1 + \frac{\|x\|}{r} + \cdots\cdots\right) = \frac{\|x\|}{r}\frac{M_0}{1-\frac{\|x\|}{r}}$

即チ $f(x)$ ハ $x=0$ ニテ連續トナル。

次ニ $\|x\| < K$ ニテ連續ナルコトヲ示ス。

$\|x\| < K$ 内部ニ一點 x_0 ヲトリ，ソコニテ $f(x)$ ヲ展開スレバ $f(x_0 + \tau y) = f(x_0) + \tau f_0(x_0; y) + \cdots\cdots + \frac{\tau^n}{\lfloor n} f_n(x_0; y) +$

右辺ハ $\|\tau y\| < r' < K - \|x_0\|$ ニテ確カニ有界ナル故右辺モソコニテ一樣收斂スル。

$f_1, f_2, \cdots\cdots$ ハ y ニ關シ夫々一次二次……齊次多項式 operator ニテ上ニミタ如ク總テ x_0 ニテ連續デアルカラ

$\|\tau y\| \to 0$ ナルトキ　$f(x_0 + \tau y) \to f(x_0)$

即チ連續デアル，

依ッテ $\|x\| < K$ ニテ analytic operator ハ有界（上ノ意味ニテ）ナラバ連續スルヲ知ッタ。

普通ノ函數論ノ如ク解析接續ノ考ヘヲ擴張スルナラバ　解析 operator ハ有界ナル処ニテ連續ナルヲ知ル。

到ル処不連續ナル analytic operator ノ例ハ下ノ如キモノガアル空間ハ點ヲ Hamel ノ Bace ニ依ッテ

$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots\cdots + \alpha_K x_K$　ト表ハストキ

$f(x) = \varphi_1(\alpha_1)f(x_1) + \varphi_2(\alpha_2)f(x_2) + \cdots\cdots \varphi_K(\alpha_K)f(x_K)$

此処ニ $f(x_1) \cdots\cdots f(x_K) \cdots\cdots$ ハ任意ニトリウル値ニテ

$\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha), \cdots\cdots \varphi_n(\alpha) \cdots\cdots$ ハ複素変數ノ解析函數トス