11. Rademacher ノ定理ノ解析的証明

東大　伊関兼四郎

(昭和20年5月17日受付)

1. 自然数 n ノ無制限ナ分割ノ数 $p(n)$ ノ生成函数ノ一次変換ニ関聯シテ 1 ノ $24k$ 乗根 (k ハ或ル自然数) ヲ決定スル問題ガ生ズル。此ノ問題ハ本来楕円 Modul 函数ノ変換ノ理論ニ属スルモノデ Hermite 以来何人カノ数学者ニ依ツテ研

究サレタ、其ノ後 Hans Rademacher ハ問題ノ24k乗根ヲ表ス一ツノ新公式ヲ得テ之ヲ算術的ニ証明シタ 以下筆者ハ Rademacher ノ公式ノ解析的証明ヲ述ベテ見タイ、其ノタメニ先ヅ Hermite ノ公式, Rademacher ノ公式ノ何レトモ異ナル一ツノ公式ヲ導キ, 然ル後此ノ公式ガ後者ト同等デアル事ヲ証明スル

2. $p(n)$ ノ生成函数ヲ $f(x)$ トスレバ明ラカニ

$$f(x)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}p(n)x^n \qquad (|x|<1)$$

今 $x=\exp\left(\frac{2\pi ih}{k}-\frac{2\pi z}{k}\right)$ ト置ケバ $f(x)$ ノ変換公式ハ

$$f(x)=\omega_{hk}\sqrt{z}\,\exp\left(\frac{\pi}{12kz}-\frac{\pi z}{12k}\right)f\left\{\exp\left(\frac{2\pi il}{k}-\frac{2\pi}{kz}\right)\right\}$$

トナル, 茲ニ z ハ $\Re(z)>0$, $\Re(\sqrt{z})>0$ ナル任意ノ複素数, k ハ任意ノ自然数, h ハ $(h,k)=1$; $1\leqq h\leqq k$ ナル任意ノ自然数, l ハ合同式 $hl\equiv -1 \pmod{k}$ ノ任意ノ有理整数解, $\omega_{h,k}$ ハ 1 ノ 24k 乗根デ其ノ値ハ h ガ奇数ナル時ハ

$$\omega_{h,k}=\left(\frac{-k}{h}\right)\exp\left(-\left\{\frac{1}{4}(2-hk-h)+\frac{1}{12}\left(k-\frac{1}{k}\right)(2h-l+h^2l)\right\}\pi i\right),$$

k ガ奇数ナル時ハ

$$\omega_{h,k}=\left(\frac{-h}{k}\right)\exp\left(-\left\{\frac{1}{4}(k-1)+\frac{1}{12}\left(k-\frac{1}{k}\right)(2h-l+h^2l)\right\}\pi i\right)$$

デ表サレル. 茲ニ $\left(\frac{a}{b}\right)$ ハ Legendre-Jacobi ノ記号デアル。勿論 h,k ガ共ニ奇数ナル時ハ上ノ二公式ハ等シイ値ヲ与ヘル。之等二公式ハ Hermite ガ得タモノデアル.

Rademacher ノ公式ハ Hermite ノ公式トハ全ク異ナル形デアッテ

$$\omega_{h,k}=\exp\left\{\pi i\sum_{\mu=1}^{k-1}\frac{\mu}{k}\left(\frac{h\mu}{k}-\left[\frac{h\mu}{k}\right]-\frac{1}{2}\right)\right\}\quad(k\geqq 2)$$

ト書カレル。茲ニ $[u]$ ハ実数 u ヲ超エナイ最大ノ有理整数ヲ表ハス. (Gauss ノ記号).

筆数ハ先ヅ

$$\omega_{h,k} = \exp\left(\frac{\pi i}{4k}\sum_{\mu=1}^{k-1}\cot\frac{\pi\mu}{k}\cot\frac{\pi h\mu}{k}\right) \qquad (k \geqq 2)$$

ヲ導カラ，以下 z ハ正数トシテ

$$\rho = \exp\left(\frac{2\pi i h}{k}\right) \qquad r = \exp\left(-\frac{2\pi z}{k}\right)$$

トオケバ，$x = \rho r$，　$0 < r < 1$ トナル．前述ノ変換公式ノ両辺ノ対数ヲ取レバ（α ハ有理整数トシテ）

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{1}{1-x^n} = \log\omega_{h,k} + \frac{1}{2}\log z + \frac{\pi}{12kz} - \frac{\pi z}{12k}$$
$$+ \log f\left\{\exp\left(\frac{2\pi i l}{k} - \frac{2\pi}{kz}\right)\right\} + 2\pi i\alpha.$$

但シ対数ハ偏角ガ $-\pi <$ 偏角 $\leqq \pi$ ナル主値ヲ取ル。此ノ等式ノ両辺ノ虚部ヲ取レバ．

$$\Im\left(\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{1}{1-x^n}\right) = \Im\log\omega_{h,k} + \Im\log f\left\{\exp\left(\frac{2\pi i l}{k} - \frac{2\pi}{kz}\right)\right\} + 2\pi\alpha,$$

$$\lim_{z\to 0}\Im\left(\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{1}{1-x^n}\right) = \Im\log\omega_{h,k} + 2\pi\alpha$$

$$\omega_{h,k} = \exp\left\{\lim_{r\to 1-0}\Im\left(\sum\log\frac{1}{1-x^n}\right)\right\}$$

故ニ次ノ式ヲ証明スレバヨイ．

$$\lim_{r\to 1-0}\Im\left(\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{1}{1-x^n}\right) = \frac{\pi}{4k}\sum_{\mu=1}^{k-1}\cot\frac{\pi\mu}{k}\cot\frac{\pi h\mu}{k}.$$

サテ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{1}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{mn}}{m} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{x^n}{1-x^n},$$

$$\Im\left(\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{1}{1-x^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Im\left(\frac{x^n}{1-x^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Im\left(\frac{1}{1-x^n}\right)$$
$$= \sum_{\substack{n=1\\ n\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,k)}}^{\infty}\frac{1}{n}\Im\left(\frac{1}{1-x^n}\right)$$

然ルニ最後ノ級数ハ後ニ証明スル如ク $0 < r < 1$ ニ於テ一様収斂スルカラ

$$\lim_{r\to 1-0}\left(\sum_{\substack{n=1\\ n\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,k)}}^{\infty}\frac{1}{n}\Im\left(\frac{1}{1-x^n}\right)\right) = \sum_{\substack{n=1\\ n\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,k)}}^{\infty}\frac{1}{n}\Im\lim_{r\to 1-0}\frac{1}{1-x^n}$$

筆数ハ先ヅ

$$\omega_{hk} = \exp\left(\frac{\pi i}{4k}\sum_{\mu=1}^{k-1}\cot\frac{\pi\mu}{k}\cot\frac{\pi h\mu}{k}\right) \qquad (k \geqq 2)$$

ヲ導カウ，以下 z ハ正数トシテ

$$\rho = \exp\left(\frac{2\pi i h}{k}\right) \qquad r = \exp\left(-\frac{2\pi z}{k}\right)$$

トオケバ，$x = \rho r$，　$0 < r < 1$ トナル．前述ノ変換公式ノ両辺ノ対数ヲ取レバ（α ハ有理整数トシテ）

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{1}{1-x^n} = \log\omega_{h,k} + \frac{1}{2}\log z + \frac{\pi}{12kz} - \frac{\pi z}{12k}$$
$$+ \log f\left\{\exp\left(\frac{2\pi i l}{k} - \frac{2\pi}{kz}\right)\right\} + 2\pi i\alpha.$$

但シ対数ハ偏角ガ $-\pi <$ 偏角 $\leqq \pi$ ナル主値ヲ取ル．此ノ等式ノ両辺ノ虚部ヲ取レバ

$$\Im\left(\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{1}{1-x^n}\right) = \Im\log\omega_{h,k} + \Im\log f\left\{\exp\left(\frac{2\pi i l}{k} - \frac{2\pi}{kz}\right)\right\} + 2\pi\alpha,$$

$$\lim_{z\to 0}\Im\left(\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{1}{1-x^n}\right) = \Im\log\omega_{h,k} + 2\pi\alpha$$

$$\omega_{h,k} = \exp\left\{\lim_{r\to 1-0}\Im\left(\sum\log\frac{1}{1-x^n}\right)\right\}$$

故ニ次ノ式ヲ証明スレバヨイ．

$$\lim_{r\to 1-0}\Im\left(\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{1}{1-x^n}\right) = \frac{\pi}{4k}\sum_{\mu=1}^{k-1}\cot\frac{\pi\mu}{k}\cot\frac{\pi h\mu}{k}.$$

サテ $$\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{1}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{mn}}{m} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{x^n}{1-x^n},$$

$$\Im\left(\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{1}{1-x^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Im\left(\frac{x^n}{1-x^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Im\left(\frac{1}{1-x^n}\right)$$
$$= \sum_{\substack{n=1 \\ n\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,k)}}^{\infty}\frac{1}{n}\Im\left(\frac{1}{1-x^n}\right)$$

然ルニ最後ノ級数ハ後ニ証明スル如ク $0 < r < 1$ ニ於テ一様収斂スルカラ

$$\lim_{r\to 1-0}\left(\sum_{\substack{n=1 \\ n\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,k)}}^{\infty}\frac{1}{n}\Im\left(\frac{1}{1-x^n}\right)\right) = \sum_{\substack{n=1 \\ n\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,k)}}^{\infty}\frac{1}{n}\Im\lim_{r\to 1-0}\frac{1}{1-x^n}$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ m \not\equiv 0 \pmod{k}}}^{\infty} \frac{1}{n} \mathfrak{J}\left(\frac{1}{1-\rho^n}\right) = \sum_{\substack{n=1 \\ m \not\equiv 0 \pmod{k}}}^{\infty} \frac{1}{2n} \cot n\theta \quad \left(\theta = \frac{\pi h}{k}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{2} \cot m\theta \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{m+ks}$$

サテ自然数 n ニ対シテ

$$\sum_{s=0}^{n} \frac{1}{m+ks} = \frac{1}{m} + \frac{1}{k}\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{s+m/k} = \frac{1}{m} + \frac{1}{k}\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{1}{s+\frac{m}{k}} - \frac{1}{s}\right) + \frac{1}{k}\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{s}$$

$$= \frac{1}{k}\left\{\log n - \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{m}{k}\right) + o(1)\right\} \quad (n\to\infty)$$

故ニ $$\sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{2} \cot m\theta \sum_{s=0}^{n} \frac{1}{m+ks} = \frac{1}{2k}\sum_{m=1}^{k-1}\left\{-\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{m}{k}\right)\right\}\cot m\theta$$

$$+ \frac{\log n}{2k}\sum_{m=1}^{k-1}\cot m\theta + o(1) \to \frac{1}{2k}\sum_{m=1}^{k-1}\left\{-\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{m}{k}\right)\right\}\cot m\theta \ (n\to\infty)$$

何トナレバ明ラカニ $\sum_{m=1}^{k-1}\cot m\theta = 0$ ダカラデアル。然ルニ

$$\frac{1}{2k}\sum_{m=1}^{k-1}\left\{-\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{m}{k}\right)\right\}\cot m\theta = \frac{1}{4k}\sum_{m=1}^{k-1}\left\{\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(1-\frac{m}{k}\right) - \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{m}{k}\right)\right\}\cot m\theta$$

$$= \frac{\pi}{4k}\sum_{m=1}^{k-1}\cot\frac{\pi m}{k}\cot\frac{\pi h m}{k}, \qquad \text{Q. E. D.}$$

3. 前述ノ一様収斂性ヲ証明スル。其ノタメニハ $0<r<1$ ニ於イテ $\sum_{s=0}^{\infty} A_s$ ガ一様収斂ナルヿヲ示セバヨイ，但シ

$$A_s = \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{m+ks} \mathfrak{J}\left(\frac{1}{1-\rho^m r^{m+ks}}\right)$$

サテ s ヲ自然数トスレバ $0<r<e^{-\frac{1}{\sqrt{s}}}$ ナルトキ

$$|A_s| \leqq \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{ks} \frac{r^{ks}}{|1-\rho^m r^{m+ks}|^2} \leqq \frac{K}{s} e^{-k\sqrt{s}}$$

茲ニ $K = K(h) > 0$ ハ h, m, s, r ニ無関係デ h, m, s, r $(0<r<1)$ ノ如何ナル許サレタル組合セニ対シテモ

$$|1-\rho^m r^{m+ks}|^2 \geqq \frac{1}{K}$$

ナルモノトスル。カヽル K ガ存在スルヿハ明ラカデアル。更ニ，$e^{-\frac{1}{\sqrt{s}}} \leqq r < 1$ ナルトキハ

$$\left|A_s - \sum_{m=1}^{k-1}\frac{1}{ks}\mathfrak{J}\left(\frac{1}{1-\rho^m r^{m+ks}}\right)\right|$$

$$= \left|\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{ks(m+ks)}\mathfrak{J}\left(\frac{1}{1-\rho^m r^{m+r}}\right)\right| \leqq \frac{K}{s^2}$$

故＝
$$\frac{K}{s^2}+\left|\sum_{m=1}^{k-1}\frac{1}{ks}\mathfrak{I}\left(\frac{1}{1-\rho^m\gamma^{m+ks}}\right)\right|$$
$$\leqq \frac{K}{s^2}+\left|\frac{1}{ks}\sum_{m=1}^{k}\mathfrak{I}\left(\frac{1}{1-\rho^m\gamma^{ks}}\right)\right|$$
$$=\frac{K}{s^2}+\left|\sum_{m=1}^{k-1}\frac{1}{ks}\mathfrak{I}\left(\frac{1}{1-\rho^m\gamma^{m+ks}}-\frac{1}{1-\rho^m\gamma^{ks}}\right)\right|$$
$$=\frac{K}{s^2}+\left|\sum_{m=1}^{k-1}\frac{1}{ks}\mathfrak{I}\left\{\frac{\rho^m\gamma^{ks}(\gamma^m-1)}{(1-\rho^m\gamma^{m+ks})(1-\rho^m\gamma^{ks})}\right\}\right|$$
$$\leqq \frac{K}{s^2}+\frac{K}{s}(1-\gamma^k)\leqq\frac{K}{s^2}+\frac{K}{s}\left(1-e^{-\frac{k}{\sqrt{s}}}\right)\leqq\frac{K}{s^2}+\frac{kK}{s\sqrt{s}}$$

斯クテ自然数 s 及ビ正数 $r<1$ ニ対シ
$$|A_s|\leqq\frac{K}{s}e^{-k\sqrt{s}}+\frac{K}{s^2}+\frac{kK}{s\sqrt{s}},$$
$$\sum_{s=1}^{\infty}|A_s|\leqq\sum_{s=1}^{\infty}\left(\frac{K}{s}e^{-k\sqrt{s}}+\frac{K}{s^2}+\frac{kK}{s\sqrt{s}}\right)<\infty \qquad \text{Q.E.D.}$$

4. 最後ニ Rademacher ノ公式ヲ証明スル

$$\pi\sum_{\mu=1}^{k-1}\frac{\mu}{k}\left(\frac{h\mu}{k}-\left[\frac{h\mu}{k}\right]-\frac{1}{2}\right)=-\pi\sum_{\mu=1}^{k-1}\frac{\mu}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\mu\theta}{n\pi}$$
$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{kn}\sum_{\mu=1}^{k-1}\mu\sin 2n\mu\theta \qquad \left(\theta=\frac{\pi h}{k}\right)$$
$$=-\sum_{\substack{n=1\\ n\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,k)}}^{\infty}\frac{1}{kn}\frac{k\sin\{2(k-1)n\theta\}}{(2\sin n\theta)^2}=\sum_{\substack{n=1\\ n\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,k)}}^{\infty}\frac{1}{2n}\cot n\theta$$
$$=\frac{\pi}{4k}\sum_{m=1}^{k-1}\cot\frac{\pi m}{k}\cot\frac{\pi h m}{k}$$

$$\exp\left\{\pi i\sum_{\mu=1}^{k-1}\frac{\mu}{k}\left(\frac{h\mu}{k}-\left[\frac{h\mu}{k}\right]-\frac{1}{2}\right)\right\}$$
$$=\exp\left(\frac{\pi i}{4k}\sum_{m-1}^{k-1}\cot\frac{\pi m}{k}\cot\frac{\pi h m}{k}\right)$$

参照文献

G. H. Hardy and camanujan, "Asymptotic formulae in combinatory analysis", 'Proc. London Math. Soc. (2), 17 (1918), pp. 75 – 115.

Hans Rademacher, "Bestimmung einer gewissen Einheitswurzel in der Theorie der Modulfunktionen", Journal London Math. Soc., 7 (1932), pp 14 – 19, also "On the partition function p(n)", Proc. London Math. Soc. (2), 43 (1937), pp. 241 – 254