9 Euclid ノ比ノ拡張ニ就イテ

東京文理大 河田敬義

(昭和20年1月30日受付)

本誌246号ニテ南雲博士ハ「正ノ量ト実数トニ関スル一考察」(談話1086)ニテ，正量ノ体系 $\mathfrak{M}_1$ カラ，正数ヲ操作(Automorphismus)ノ作ル半環トシテ定義シテ，ソノ性質ヲ導イタ。§1 デハ之ヲ Euclid ノ比ノ理論(例ヘバ Euclid, Die Elemente, Ostwald's Klassiker, Teil II, S17−36, Buch V (E.V. トシテ引用)参照)ニ依リ(Schnitt ノ助ケヲカリテ)別証スル。

以上ノ一次元連続量ノ考察ニ対シテ，§2, 3 デハ一般連続量ニ関スル Euclid ノ比ノ理論ヲ考ヘル。コレハ一次元ノ場合ノ性質ヲ大部分保持スルガ負ノ数ト合セテ体ニ拡張スルコトガ出来ナイノデ，コノ性質ガ一次元トイフコトノ特徴ヲ与ヘルコトニナル。内容トシテハ中野博士ノ Dilatator ノ特別ナ場合ニスギナイ。一般連続量ヲ考ヘタノハ，ソレニヨリ普通ノ一次元トイフ性質ガドコマデキイテクルカヲ見ルタメデアッタケレドモ，ソレ自身トシテ，例ヘバ確率論的量トカ経済的量トカヲ考ヘル場合ニハ，全然無用ノモノデハナイデアラウ。

§ 1

談話1086ノ初メノ部分ヲ繰返ス。

$\boxed{\text{定義 1}}$ 次ノ公理 G_0 — G_5 ヲ満足スル集合 $\mathfrak{M}$ ヲ一次元的連続量ノ体系トイフ。

$\boxed{G_0}$ $\mathfrak{M}_1 \ni x, y$ ニ対シテ，$x+y \in \mathfrak{M}_1$ ガ一義ニ対応スル。

$\boxed{G_1}$ $x+y = y+x$

$\boxed{G_2}$ $(x+y)+z = x+(y+z)$

$\boxed{G_3}$ $x+y \neq x$

$\boxed{G_4}$ (一次元ノ公理) $\mathfrak{M}_1 \ni x, y$ ニ対シテ，$x = y+z$ カ $y = x+z'$ ノ一方ガ成立ス

$\boxed{G_5}$ (連続ノ公理) $\mathfrak{M}_1 = A \cup B$，$A = \{a;$ スベテノ $b \in B$ ニ対シテ $a > b\}$ $B = \{b;$ スベテノ $a \in A$ ニ対シテ $b < a\}$ ナルトキ，スベテノ $a \in A$ ニ対シテ $a \geqq x$，スベテノ $b \in B$ ニ対シテ $b \leqq x$ ナル $x \in \mathfrak{M}_1$ ガ只一ツ存在スル。コノトキ $x = (A|B)$ トカク。

但シ $x = y+z$ ノトキ $x > y$ ト記ス。

$\boxed{\text{定理 1}}$ $\mathfrak{M}_1$ ハ順序 $>$ ニ関シテ，完備線状順序集合ヲ作リ且ツ

$$x > y \rightleftarrows x+z > y+z$$

定義 2　$x = y + z$ ノトキ $z = x - y$ トカク

定理 2　(稠密性)　$x < y$ ナラバ $x < z < y$ ナル z ガアル

定理 3　$\mathfrak{V}_1$ ニハ最大元モ最小元モナイ

定理 4　(等分可能性)　x ニ対シテ $ny = x$ ナル y ガアル (n: 自然数)

定義 3　(E.V. 定義 4)　x ト y トガ比較可能デアルトハ

$$mx > y, \quad ny > x$$

ナル自然数 m, n ノ存在スルコトヲイフ。

定理 5　(Archimedes ノ原則)　$\mathfrak{V}_1$ ノ任意ノ二元ハ比較可能デアル。

以上ハ公理 G_5 カラノ帰結デアルガ，以下 (I) —(XIV) デハ最ラ Archimedes ノ原則ニヨリ，G_5 ヲ用ヒナイデモスム。

定義 4　$\mathfrak{V}_1$ ノ u, x ノ順序アル組 $(x;u)$ ヲ，x, u ニ対スル比 (Verhältnis) (x ヲ u ヲ単位トシテ測ッタ数量) トイフ。

定義 5　(E.V. 定義 5)　$(x;u) = (y;v)$ トハ $mx \gtreqless nu$ ナル自然数 m, n ニ対シテ夫々 $my \gtreqless nv$ トナルコトヲイフ。

定義 6　(E.V. 定義 7)　$(x;u) > (y;v)$ トハ，アル自然数組 m, n ニ対シテ

$$mx > nu, \quad my < nv$$

トナルコトヲイフ。

(I)　(E.V. §1)　$(x;u) = (y;v),\ (y;v) = (z;w) \Rightarrow (x;u) = (z;w)$

(II)　$(x;u)$ ト $(y;v)$ ノ間ニハ $>, =, <$ ノイヅレカ只一ツガ常ニ成立ツ

(III)　(E.V. §13)　$(x;u) = (y;v),\ (x';u') = (y';v'),\ (x;u) > (y;v)$
$\Rightarrow\ (x';u') > (y';v')$

(IV)　$(x;u) > (y;v),\ (y;v) > (z;w) \Rightarrow (x;u) > (z;w)$

(V)　$(x;u) = (y;v) \Rightarrow (u;x) = (v;y)$

(VI)　$(x;u) > (y;v) \Rightarrow (u;x) < (v;y)$

(VII)　(E.V. §7, 8, 9, 10)　$x > y \rightleftarrows (x;u) > (y;u)$

(VIII)　(E.V. §14)　$(x;u) = (y;v)$ ナラバ，$x \gtreqless y \rightleftarrows u \gtreqless v$

(IX)　(E.V. §4)　$(x;u) = (y;v) \Rightarrow (mx;nu) = (my;nv)$

(X)　(E.V. §12)　$(x;u) = (y;v) \Rightarrow (x+y;u+v) = (x;u)$

(XI)　(E.V. §18)　$(x;u) = (y;v) \Rightarrow (x+u;u) = (y+v;v)$

(XII)　(E.V. §16)　$(x;u) = (y;v) \Rightarrow (x;y) = (u;v)$

(XIII)　(E.V. §22)　$(x;u) = (y;v) \Rightarrow (x;y) = (u;v) \Rightarrow (x;v) = (x';$

XIV) (E. V. §24) $(x:u)=(x':u'),\ (y:u)=(y':u') \Rightarrow (x+y:u)=(x'+y':u')$

以上ノ Euclid ノ証明ハヨク知ラレテキル析ニナカナカウマイモノデアル。次ノ性質ハ Γ_5 ニヨリ初メテ成立ツ

XV) (第四比例項ノ存在) x, u, v ヲ与ヘタトキ $(x:u)=(y:v)$ ナル y ガ存在スル。

(証) $A=\{a;\ (x:u)<(a:v)\}$, $B=\{b;\ (x:u)\geqq(b:v)\}$ トスレバ, A, B ハ Archimedes ノ原則カラ空デナイ コレカラ Schnitt $y=(A|B)$ ヲ作レバ y ハ求メル元デアル。

コトト(VII)ヲ合セテ

XVI) $(x:u)>(y:v) \rightleftarrows x'>y',\ (x:u)=(x':w),\ (y:v)=(y':w)$

定義 7 $\{(x:u);\ x,u\in\mathfrak{X}_1\}$ ヲ定義 5 ニヨリ組分ケシテ, ソノ全体ヲ $\mathfrak{M}_1$ トスル
$\mathfrak{M}_1=\{\lambda;\ \lambda=(x:u)\}$ ソノ間ノ $>$ ヲ定義 6 デ与ヘルト, 線状順序集合トナル。

定義 8 $\mathfrak{M}_1$ ヲ λ, μ ニ対シテ $\lambda=(x:u)$ $\mu=(y:u)$ トアラハストキ

$$\lambda+\mu=(x+y:u)$$

デアラハス。(XIV) ニ依リ代表ノトリ方ニ無関係デアル

又 $\lambda=(x:u)$ $\mu=(u:v)$ トアラハストキ

$$\lambda\mu=(x:v)$$

トスル。(XIII) ニヨリ代表ノトリ方ニ無関係デアル。

定理 6
(i) $\lambda+\mu=\mu+\lambda$
(ii) $(\lambda+\mu)+\nu=\lambda+(\mu+\nu)$
(iii) $\lambda\mu=\mu\lambda$
(iv) $(\lambda\mu)\nu=\lambda(\mu\nu)$
(v) $(\lambda+\mu)\nu=\lambda\nu+\mu\nu$
(vi) $1\lambda=\lambda 1=\lambda$ $(\lambda\in\mathfrak{M}_1)$ ナル 1 ノ存在
(viii) $\lambda^{-1}\cdot\lambda=\lambda\cdot\lambda^{-1}=1$ ナル λ^{-1} ノ存在

(証) (i) ハ G_1, (ii) ハ G_2 ニ帰セラレル。 (iv) $\lambda=(x:y)$ $\mu=(y:z)$ $\nu=(z,w)$ トスレバ, 左辺 = 右辺 = $(x:w)$ (v) $\lambda=(x:u)$, $\mu=(y:u)$ $\nu=(u:v)$ トスル。 左辺 = $(x+y:v)$ (vi) $1=(x:x)$

(viii) $\lambda=(x;u)$ ニ対シテ $\lambda^{-1}=(u;x)$ (V)参照 (ix) $\lambda=(x;y)$, $\mu=(y;u)$ ナラバ $\lambda\mu=(x;u)$ 一方 $(x;y)=(u;z)$ トスレバ $\mu\lambda=(y;z)$ (XII) ヨリ $(x;u)=(y;z)$ デアルカラ $\lambda\mu=\mu\lambda$

定理 7 $\mathfrak{G}_1$ ヨリ u ヲ固定スルト $(x;u)=\lambda \longleftrightarrow x$ ニヨリ $\mathfrak{G}_1$ ト $\mathfrak{M}_1$ トハ加法ニ関シテ同型デアル

(証) 定義 8、(VII) ニヨル

定義 9 $\mathfrak{G}_1$ ノ自己同型 $x \longrightarrow \lambda(x)$ トハ $\mathfrak{G}_1$ ノ $\mathfrak{G}_1$ 全体ヘノ一対一対応デ

$$(*) \qquad \lambda(x+y)=\lambda(x)+\lambda(y)$$

ヲ満足スルモノヲイフ。$\mathfrak{G}_1$ 自己同型半環ヲ $\mathfrak{R}_1$ デアラハス

定理 8 $\lambda(x)\in\mathfrak{R}_1$ ナラバ, $(\lambda(x);x)=(\lambda(y);y)$ 即チ一ツノ $\lambda\in\mathfrak{M}_1$ ヲ定メル 逆ニ $\mathfrak{M}_1$ ヲ λ ニ対シテ $\lambda=(y;x)$ ノトキ $y=\lambda(x)$ トスレバ一ツノ $\lambda(x)\in\mathfrak{R}_1$ ヲ定メル。コノ対応ハ 1:1 デ, $\mathfrak{R}_1$ ト $\mathfrak{M}_1$ トハ環同型トナル。

(証) 前半, (*) ト定義 5 ニヨリ $(x;y)=(\lambda(x);\lambda(y))$ 故ニ (XII) カラ $(\lambda(x);x)=(\lambda(y);y)$ トナル. 後半 (X) ニヨル 環同型ナルコトハ定義 9 ニヨル。

定理 9 $I_a=\{x;\ x<a\}$ 一般ニ $I_{a,b}=\{x;\ a<x<b\}$ トスルト任意ノ $I_{a,b}$ ト $I_{c,d}$ トハ線状順序集合トシテ同型デアル

(証) $x\longrightarrow x+(b-a)$ デ $I_{b-a}\cong I_{a,b}$ 同様ニ $I_{d-c}\cong I_{c,d}$ 次ニ $x\longrightarrow\lambda(x)$ $\lambda=(b-a;d-c)$ ニヨリ $I_{b-a}\cong I_{d-c}$.

定理 10 0 及ビ負ノ元ヲ附ケ加ヘテ $\mathfrak{M}_1$ ヲ体ニマデ拡張スルコトガ出来ル。

§2 デハ $\mathfrak{M}_1$ ($\mathfrak{R}_1$) ガ正ノ実数ノ作ル半環ト同型デアルコトヲ用ヒル。

§ 2

定義 10 次ノ公理 G_0' —— G_5' ヲ満足スル集合 $\mathfrak{G}$ ヲ一般連続量ノ体系トイフ。$G_0'=G_0$ $G_1'=G_1$ $G_2'=G_2$ $G_3=G_3$

$\boxed{G_4}$ (連続　公理)　$x > y \rightleftarrows x = y + z$ トスル。$\mathfrak{G}$ ノ空デナイ集合 A, B デ $A = \{a$, スベテノ $b \in B$ ニ対シテ $a > b\}$, $B = \{b$ | スベテノ $a \in A$ ニ対シテ $a > b\}$ ナルトキ, スベテノ $a \in A$ ニ対シテ $a \geqq x$, スベテノ $b \in B$ ニ対シテ $x \geqq b$ ナル $x \in \mathfrak{G}$ ガ只一ツ存在スル。コレヲ $x = (A|B)$ デ表ハス。

$\boxed{G_5'}$　次ノ定義 11 ノ意味デノ単位元ガ存在スル。

$\boxed{\text{定義 11}}$　$e \in \mathfrak{G}$ ガ単位デアルトハ任意ノ $x \in \mathfrak{G}$ ニ対シテ, $ne > x$ ナル自然数 n ノ存在スルコトヲイフ。

単位元ノ全体ヲ $\mathfrak{G}^*$ デアラハス。単位元同志ハ定義 3 ニヨリ互ニ比較可能デアル。定理 2, 3, 4 ハソノママ成立ツ, 定理 4 カラ $\mathfrak{G} \ni x$ ニ対シテ $\frac{m}{n}x \in \mathfrak{G}$ ガ一義ニ定義サレル。G_4' ニヨリ正ノ実数 λ, $x \in \mathfrak{G}$ ニ対シテ λx モ定義サレル 即チ

$\boxed{\text{定理 11}}$　正実数 λ, $x \in \mathfrak{G}$ ニ対シテ, 次ノ性質ヲ持ツ様ニ $\lambda x \in \mathfrak{G}$ ガ一義ニ定義サレル.

$$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y, \quad (\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x \quad (\lambda\mu)x - \lambda(\mu x)$$

$$1 \cdot x = x$$

G_4' カラ又次ノコトガ成立ツ。

$\boxed{\text{定理 12}}$　$x > y \rightleftarrows x = y + z$, $z \in \mathfrak{G}$ ナル順序ニ関シテ $\mathfrak{G}$ ハ條件附完備束トナル 且 $x > y \rightleftarrows \lambda x > \lambda y \rightleftarrows x + z > y + z$ デ満足スル

$\mathfrak{G}^*$ デハ $x > y$ $(x, y \in \mathfrak{G}^*)$ 即 $x = y + z$, $z \in \mathfrak{G}$ $(z \in \mathfrak{G}^*$ デハナイ) トスレバ, G_0' —— G_5' ガ成立ツ。x ノ y ヲ $\mathfrak{G}^*$ ノ中ダケデイ・ハウトスルナラバ $x > y \rightleftarrows$ (i) $x \neq y$, (ii) $y = z + u$, $z, u \in \mathfrak{G}^*$ ナラバ $x = z + v$, $v \in \mathfrak{G}^*$ トアラハサレルコトニナル。

$\boxed{\text{定義 4}'}$　$\mathfrak{G}^*$ ノニα x, u ノ順序アル組 $(x ; u)$ ヲ x ノ u ニ対スル.

比トイフ　比ノ相等ノ定義ハ一次元ノ場合ト異ナツテ来ル，ソノタメニ定義5ヲ化直ス．

定義11　$\mathfrak{M}_1$ 中 $\mathfrak{M}_1(x, y) = \{mx + ny\}$ トスルト，$(x ; u) = (y ; v)$ トハ $\mathfrak{M}_1(x, u)$ ト $\mathfrak{M}_1(y, v)$ トガ

$$mx + nu \rightleftarrows my + nv$$

ナル対応デ $\mathfrak{M}_1$ ニ於ケル順序ニ関シテ同型デアルコトヲイフ．

コレヲ拡張シテ，$\mathfrak{M}$ 中 $\mathfrak{M}(x, y)$ トハ x，ト y トカラ $+$，$\cup$，$\cap$，$-$（但シ可能ナ場合）ヲ有限回施シテ得ラレル全体ヲアラハストキ

定義12　$\mathfrak{M}^*$ ヲ x, u, y, v ニ対シテ　$(x ; u) = (y ; v)$ トハ $\mathfrak{M}(x, u)$ ト $\mathfrak{M}(y, v)$ トガ同一語ヲ対応サセルトキ，一対一対応トナリ

(i)　$+$ ニ関シテ同型

(ii)　$\cup$ 及ビ $\cap$ ニ関シテ同型

(iii)　相対スル元ハ互ニ比較可能

ナルコトヲイフ．

比ノ大小関係ハ直接ニ定義シ難イノデ (XVI) ニ相等シテ

定義13　$\mathfrak{M}^*$ ニ於ケル比 $(x ; u)$ モ (I) (III) —(XV) 及ビ

(II′)　$(x ; u)$，$(y ; v)$ ノ間ニハ $=$，$>$，$<$ ノ三者ガ同時ニ成リ立ツコトハナイ．

ガ成立ツ．

定義14　$\Lambda = (x ; u)$　$(x, u \in \mathfrak{M}^*)$ ノ全体ヲ $\mathfrak{N}^*$ トスルト $+$，，$>$ ガ等價ナルモノ組ノ算法トシテ定義8ニヨリ定義サレル

定理14　$\mathfrak{N}^*$ ハ定理6ノ性質 (i) —(vii) ヲ満足スル

定理15　$u \in \mathfrak{M}^*$ ヲ定メルト，$\Lambda = (x ; u) \rightleftarrows x \in \mathfrak{M}^*$ ノ対応ニヨリ，$\mathfrak{M}^*$ ト $\mathfrak{N}^*$ トハ一対一ニ対応シ，加法及ビ順序ニ関シテ同型デアル

定義15　$\mathfrak{M}$ 自己同型　$x \longrightarrow \Lambda(x)$ トハ $\mathfrak{M}$ ノ $\mathfrak{M}$ 全体ヘノ

一対一対応デ　(i) $\Lambda(x) + \Lambda(y) = \Lambda(x + y)$

(ii) x ト $\Lambda(x)$ トハ定義8ニヨリ互ニ比較可能

ナルコトヲイフ．

明ニカヽル自己同型全体 $\mathfrak{A}^*$ ハ半環ヲ作ル。

$$\Lambda_1 \geqq \Lambda_2 \rightleftarrows \text{スベテノ } x \in \mathfrak{V} \text{ ニ対シテ } \Lambda_1(x) \geqq \Lambda_2(x)$$

ト定義スル。(i)カラ

$$\Lambda(x \vee y) = \Lambda(x) \vee \Lambda(y)$$

$$\Lambda(\lambda x) = \lambda \Lambda(x)$$

モ成立ツ

定理16 $\mathfrak{A}^* \ni \Lambda(x)$ ナラバ、$x, y \in \mathfrak{V}^*$ ニ対シテ

$$(\Lambda(x) : x) = (\Lambda(y) : y)$$

即チ $\mathfrak{V}^*$ ノ元 $\Lambda = (\Lambda(x) : x)$ ヲ定メル。逆ニ $\Lambda \in \mathfrak{V}^*$ ニ対シテ、$u \in \mathfrak{V}^*$ ニハ $\Lambda = (x : u)$ トアラハストキニハ、$\Lambda(u) = x$ トオケバコノ対応ハ一義ニ $\mathfrak{V}$ 全体ノ自己同型ニ拡張サレル。コノ $\mathfrak{A}^*$ ト $\mathfrak{V}^*$ ノ対応ハ一対一デ環同型及順序同型トナル。

定理17 $I_{a,b} \cong I_{c,d}$ (順序ニ関シテ), $a, b, c, d \in \mathfrak{V}^*$ (但シ $b-a$, $d-c \in \mathfrak{V}^*$ トス。)

最後ニ

定理18 $\mathfrak{V}^*$ ガ体ニマデ拡張サレルノハ $\mathfrak{V}$ ガ $\mathfrak{V}_1$ ノ場合ニ限ル。

§ 3

之等ノ諸定理ヲ応用スル

K. Yoshida, On vector lattice with a unit, Proc. Imp. Acad. 18 ト全ク同様ニ

定理19 (i) $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_1 \cong \{\lambda e\}$ ノ場合ヲ除イテ極大イデヤル $\mathfrak{J}$ ガ存在スル。コヽニ $\mathfrak{V}$ ノイデヤルトハ (イ) $\mathfrak{J} \ni x, y \Rightarrow \mathfrak{J} \ni x \vee y$
(ロ) $\mathfrak{J} \ni x,\ x > y \Rightarrow \mathfrak{J} \ni y$ (ハ) $\mathfrak{J} \neq \mathfrak{V}$

(ii) $\mathfrak{V}/\mathfrak{J} = \mathfrak{V}(\mathfrak{J}) \cong \mathfrak{V}_1$ ($\mathfrak{J}$: 極大イデヤル) ノ対応ヲ

$$x \longrightarrow x(\mathfrak{J}) \in \mathfrak{V}_1$$

ヲトルト (但シ $x \in \mathfrak{J}$ ノ元ニハ形式的ニ $\mathfrak{V}$ ニ附加シタ 0 ヲ対応サセル) コノ対応ハ +, ∪, ∩ ニ関シテ準同型トナル。逆ニ 極大

イデヤルノ全体ヲ Ω トスルト

$$x \longrightarrow \{x(\mathfrak{J})\ ;\ \mathfrak{J}\in\Omega\}$$

ハ $+, \vee, \wedge$ ニ関シテ同型トナル。特ニ $x \in \mathfrak{X}^*$ ハ如何ナル $\mathfrak{J}$ ニモ含マレナイカラ, $x(\mathfrak{J}) \in \mathfrak{X}_1$ トナル。

次ニ前田－小笠原「ベクトル束ノ表現ニツイテ」(広島文理大紀要) ト同様ニ

$\boxed{\text{定理 20}}$ $x = \bigcup_n (x \wedge ny)$ ノトキニ $x \prec y$;

$x\prec y,\ y \prec x$ ノトキニ $x \sim y$

トスルト, $\mathfrak{X}$ ハ $\sim$ ニヨリ組ミ分ケラレ, $\prec$ ニヨリ組ノ間ノ順序ヲ考ヘルト, 完備 Boole 代数 $\mathfrak{L}$ トナリ, 特ニ $\mathfrak{X}^*$ ヲ含ム組ハ $\mathfrak{L}$ ノ最大元 I トナル。

$\boxed{\text{定理 21}}$ $\mathfrak{X}$ ノ極大イデヤル $\mathfrak{J}$ ト $\mathfrak{L}$ ノ素イデヤル $\mathfrak{p}$ トハ次ノ対応ニヨリ一対一ニ対応スル.

$\mathfrak{J}\in\Omega$ ニ対シテ $\mathfrak{p}(\mathfrak{J}) = \{\bar{x}\ ;\ x\in\mathfrak{J}\}$ ハ $\mathfrak{L}$ ノ素イデヤル ($\bar{x}$ ハ x ヲ含ム組)

$\mathfrak{p}$ ニ対シテ $\mathfrak{J}(\mathfrak{p}) = \{x\ ;$ スベテノ $\lambda\in\mathfrak{X}_1$ ニ対シテ $\overline{x-(x\wedge\lambda e)} \in \mathfrak{p}\}$

$= \{x\ ;$ スベテノ $\lambda\in\mathfrak{X}_1$ ニ対シテ $\overline{\lambda e - (x\wedge \lambda e)} \notin \mathfrak{p}\}$

以上ノ結果ヨリ次ノ基本的関係が成立ツ

$\boxed{\text{定理 22}}$ $x, u, y, v \in \mathfrak{X}^*$ ニ関シテ

$$(x:u) = (y:v) \rightleftarrows (x(\mathfrak{J}) : u(\mathfrak{J})) = (y(\mathfrak{J}) : v(\mathfrak{J})),$$

スベテノ $\mathfrak{J}\in\Omega$

コノ右辺ノ比ヲ $\Lambda(\mathfrak{J})$ デ表ハス。

(証) $(x:u)=(y:v)$ トスル

$$m\, x(\mathfrak{J}) > n\, u(\mathfrak{J}) \rightleftarrows (x - \tfrac{n}{m}u)(\mathfrak{J}) \in \mathfrak{X}_1 \rightleftarrows x - \tfrac{n}{m}u \notin \mathfrak{J}$$

$\rightleftarrows$ アル λ ニ対シテ $\overline{\lambda u - (x-\frac{n}{m} u)\wedge \lambda u} \notin \mathfrak{p}(\mathfrak{J})$

一方定義 12 (ii) ニヨリ

$$\overline{\lambda u - (x-\tfrac{n}{m}u)\wedge\lambda u} = \overline{\lambda v - (y-\tfrac{n}{m}v)\wedge\lambda v}$$ ニヨリ

$\rightleftarrows$ アル λ ニ対シテ $\overline{\lambda v-(y-\frac{n}{m} v)\wedge\lambda v}\notin \mathfrak{p}(\mathfrak{J})$

$\rightleftarrows m\,y(\mathfrak{J}) > n\,v(\mathfrak{J})$ 全ク同様ニ $mx(\mathfrak{J}) = nu(\mathfrak{J})$

$\rightleftarrows mx - nu \in \mathfrak{J} \rightleftarrows \overline{mx-nu} \in \mathfrak{p}(\mathfrak{J}) \rightleftarrows \overline{my-nv} \in \mathfrak{p}(\mathfrak{J})$

$\rightleftarrows my(\mathfrak{J}) = nv(\mathfrak{J})$ 以上合セテ

$(x(\mathfrak{J}) : u(\mathfrak{J})) = (y(\mathfrak{J}) : v(\mathfrak{J}))$ トナル。

逆ニ $u \in \mathfrak{r}^*$ ヲキメテ

$x_u(\mathfrak{J}) = (x(\mathfrak{J}) ; u(\mathfrak{J}))$ トスレバ

$x \longleftrightarrow x_u(\mathfrak{J}),\quad \mathfrak{J}\in\Omega$

ナル対応ハ定理19カラ $+,\ \wedge,\ \vee$ ニ関シテ同型デアルカラ.

$(x(\mathfrak{J}) : u(\mathfrak{J})) = (y(\mathfrak{J}) : v(\mathfrak{J}))\quad \mathfrak{J}\in\Omega$

$\Rightarrow \mathfrak{r}(x,u) \cong \mathfrak{r}(y,v)$ 及ビ対応スルモノガ互ニ比較可能 (x, u, v ノ比較可能カラ) ガ導カレル。即チ $(x;u)=(y;v)$ トナル (証了)

コレカラ定理13, 14, 15 ガ成立ツ.

定理16ノ証 前半 $\Lambda(x)\in\mathfrak{O}^*$ ナラバ, 定義12, 15ヨリ

$(\Lambda(x):\Lambda(y)) = (x:y)$ 即チ $(\Lambda(x):x) = (\Lambda(y):y)$ ヲ得ル.

後半. $\Lambda\in\mathfrak{O}^*$ ニ対シ, $u\in\mathfrak{r}^*$; $\Lambda=(x:u)$ ニ対シテ $x=\Lambda(u)$ トスレバ, $\mathfrak{r}^*$ ノ範囲デハ (i) ガ成立ツ. $x\notin\mathfrak{r}^*$ ノトキハ

$x = y - z$, $y, z\in\mathfrak{r}^*$ トスレバ

$\Lambda(x) = \Lambda(y)-\Lambda(z)\in\mathfrak{r}$

ニヨリ $x\longrightarrow\Lambda(x)$ ガ一義ニ定メラレル。コノトキ $x\notin\mathfrak{J}$ ナラバ

$\Lambda(x)(\mathfrak{J}) + \Lambda(z)(\mathfrak{J}) = \Lambda(y)(\mathfrak{J})$ ヨリ

$(\Lambda(x)(\mathfrak{J}) : x(\mathfrak{J})) = \Lambda(\mathfrak{J})$ トナリ, $x\in\mathfrak{J}$ ナラバ

$(\Lambda(z)(\mathfrak{J}) ; u(\mathfrak{J})) = (\Lambda(y)(\mathfrak{J}) : u(\mathfrak{J}))$, 即チ

$\Lambda(y)-\Lambda(z)\in\mathfrak{J}$, $\Lambda(x)\in\mathfrak{J}$ トナル。今

$\frac{1}{m}<\Lambda<n$ トスレバ, $\frac{1}{m} < \Lambda(\mathfrak{J}) < n$ トナルカラ

$\frac{1}{m} x(\mathfrak{J}) < \Lambda(x)(\mathfrak{J}) < n\, x(\mathfrak{J}) \quad (x\notin\mathfrak{J})$

トナル。ソレト上ノ $x\in\mathfrak{J}\longleftrightarrow\Lambda(x)\in\mathfrak{J}$ ト合セテ, 定理19

$x0$。

ニヨリ
$$\frac{1}{m}x < \Lambda(x) < nx$$
ガ導カレル。即チ x ト $\Lambda(x)$ トハ比較可能トナツタ（証了）

定理18ノ証）　$\mathfrak{o} \neq \mathfrak{o}_1$ ナラバ定理.18ニヨリ極大イデヤル $\mathfrak{J}$ ガ存在スル。即チ $\mathfrak{o} \neq \mathfrak{o}^*$ デアル，ヨツテ $\mathfrak{L}$ ニ於テ
$$I = B_1 \cup B_2, \quad B_1 \cap B_2 = 0 \quad B_1 \neq 0,\ B_2 \neq 0$$
分解サレル。　$B_i \ni x_i$，$x_i = y_i - z_i$；$y_i, z_i \in \mathfrak{o}$ ニトレバ（$\mathfrak{o}^* \cong \mathfrak{O}^*$ ナル故，同ニ文字ヲ用ヒテ）
$$w = y_1 y_2 + z_1 z_2, \quad u = y_1 z_1 + y_2 z_1$$
ハ各 $\mathfrak{J} \in \Omega$ ニ対シテ $w(\mathfrak{J}) = u(\mathfrak{J})$ ヲ満足スル，故ニ定理19ニ依リ $u = w$ トナル。　今 $\mathfrak{O}^*$ ガ体ニ拡張サレタトスルト
$$(y_1 - z_1)(y_2 - z_2) = w - u = 0$$
トナリ零因子ヲ生ズル。コレハ矛盾デアル。　（20, 1, 18）

河田敬義，祐乗坊瑞満，伊関義四郎，角谷静夫，四氏ノ論文ハ既ニ昭和20年春受付ケタモノデアリマスガ，種々ノ事情ノタメ本号マデノビタコトヲオワビ致シマス。

編輯者
發行者　清水辰次郎

大阪帝國大學理學部數　教室