8. 多項式 Operator ニ関スル 二三 注意（1）

阪大　木村直樹

（11月2日受付）

E ヲ complex Banach space, C ヲ complex number ノ space トシマス。E 全体デ定義サレタ函数 $f(x)$ ガ

$$f(\alpha x + \beta y) = \sum_{\nu=0}^{n} \alpha^{n-\nu} \beta^{\nu} p_\nu(x, y) \qquad (1)$$

ト表示出来ルトキ n次斉次トイヒ、之ガ $\alpha = 1$ ニ対シテ成立スルトキハ唯単ニ n次トイヒマス。

$f(x)$ ガ n次（斉次）ナラバ $p_\nu(x, y)$ ハ x ニ関シテ（$n-\nu$）次（斉次）y ニ関シテ ν次斉次トナリマス。又 $f(x)$ ハ ν次斉次式 $f_\nu(x)$ ノ和トシテ

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x)$$

ト唯一通リニ和分解サレマス。之ヨリ n次式ノ或ル種ノ性質ハ ν次斉次式ノ性質ノ合成トシテ考ヘラレマス。

註　0次斉次式ハ constant。一次斉次式ハ之ガ連続ナルトキハ普通ノ所謂線型作用素ナリマスガ連続性ガナイトキハ必ズシモソウハナリマセン、例ヘバ E ノ連続性ヲ入レタ場合ノ Base ヲ $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, x_{\alpha_3}, \ldots x_{\alpha}, \ldots$ トシ連続性ヲ除イタトキノ Hamel ノ Base ヲ

$$x_0, x_1, \ldots x_n \ldots, y_0, y_n \ldots$$

トシマス 此ノ時 E ノ元ヲ z ハ

$$z = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_{\nu_i} + \sum_{j=1}^{q} \beta_j y_{\mu_j} + \gamma x_0$$

ト unique ニ表ハシマスカラ

$$f(z) = \gamma$$

トシマスト連続デナイ一次斉次式ガ出来マス。

$f(x)$ ガ n次ナルトキ 一点デ連続ナルコトト 凡テノ点デ連続ナルコトト全ク同ジコトナリ、又 f ノ連続性ハ

次ノ式ニ依リ表ハサレマス。即チ

$$|f(x)| \leqq K\,(1+\|x\|)^n$$

或ヒハ

$$|f(x)| \leqq L\,(1+\|x\|^n)$$

連続ナラバ $\|x\| \leqq R$ デ一様連続ナルコトモ明ラカデス。

即チ 一点デ連続ナラバ到ル所デ連続且有界範囲デ一様連続，又一点デ不連続ナラバ到ル所デ不連続トナリマス。

偖テ n 次斉次式ヲ (1) ノ如ク表ハシマスト $p_\nu(x,y)$ ハ $E\times E$ カラ C ヘノ Operator ト考ヘレバ

$f(x)$ ガ連続ナラバ凡テノ $p_\nu(x,y)$ ハ連続

トナリマスガ。

$f(x)$ ガ不連続ナラバ凡テノ $p_\nu(x,y)$ モ不連続

ナルコトガ分リマス。ソレニハ

$$f(x+\omega^k x) = \sum_{\nu=0}^{n} \omega^{(n-\nu)k}\, p_{n-\nu}(x,x)$$

$$n\,f_\nu(x,x) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(n-\nu)k}(1+\omega^k)^n f(x)$$

$$= n\binom{n}{\nu} f(x)$$

トスレバ $f_\nu(x,x)$ ハ E カラ C ヘノ n 次斉次式デ不連続トナルコトカラ明ラカデス

尚 $f(x)$ ノ次数及ビ斉次性ハ invariant デス. 即チ unitary 変換 U ニ対シ

$$f(Ux) = g(x)$$

トスルトキ f ト g トノ次数及ビ斉次性ハ保タレマス。

次ニ E ノ linear subspace V トハ $V \ni x, y$ ナルトキニハ常ニ

$$\alpha x + \beta y \in V$$

ナル集合トシマス

Lemma 1　　E $lin.$ subspace V ノ上ノ n 次斉次式ハ存在スル。

Lemma 2　　V ノ上ノ n 次斉次式 $f(x)$ ハ　V ト V ニ属シナイ一点 z ノ張ル space $V' = (V, z)$ ノ上ニ拡張スルコトガ出来ル。即チ V' 上ノ n 次斉次式 $F(x)$ ガ存在シ

$$F(x) = f(x) \qquad x \in V$$

更ニ此ノ時 $F(z)$ ノ値ヲ任意ニ指定スルコトモ出来ル。

証.
$$F(x + \alpha z) = F(x) + \alpha\, \omega_{n-1}(x) + \cdots\cdots + \alpha^{n-1}\omega_1(x) + \alpha^n \omega_0$$

コヽニ $\omega_\nu(x)$ ハ V_{1+} 上ノ ν 次斉次式トスル.

$$F(\gamma(x+\alpha z) + \delta(y+\beta z)) = F((\gamma x + \delta y) + (\gamma\alpha + \delta\beta)z)$$

トシテ展開スレバ γ δ ニ関スル n 次斉次式トナリ，ソノ係数ハ x, y, α, β ニヨリ unique ニ決定サレル。依ッテ $x+\alpha z$, $y+\beta z$ ニ依リ unique ニ決ル

尚ホ此ノ方法デ斯カル n 次斉次式 $F(x)$ ガ凡デ得ラレタコトニナル。

註 唯 $F(x)$ ノ存在ヲイフノミナラバ

$$F(x + \alpha z) = f(x)$$

トスレバヨイ。

Theorem 1.　　E ノ linear subspace V ノ上ノ n 次斉次式 $f(x)$ ハ E ノ上全体ニ拡張スルコトガ出来ル　即チ E ノ上ノ n 次斉次式 $F(x)$ ガ存在シテ

$$F(x) = f(x) \qquad x \in V$$

Lemma 2 ニヨリ Zorn ノ Lemma ヲ使ヘバヨイ。

Lemma 3,　　$lin.$ subspace U, V ガ一次独立ナルトキ U 及ビ V ノ上ノ n 次斉次式 $f(x)$, $g(y)$ ハ同時ニ E ノ上ニ拡張スルコトガ出来ル，即チ E ノ上ノ n 次斉次式 $F(x)$ ガ存在シテ

$$F(x) = f(x) \qquad x \in U$$

$$F(y) = g(y) \qquad y \in V$$

但シ $n \geq 1$

$W=(U, V)$ マデ拡張スレバ充分デアル

$$W \ni z = x+y \qquad x \in U,\ y \in V$$

ニ対シテ

$$F(z) = f(x) + p_1(x,y) + p_2(x,y) + \cdots + p_{n-1}(x,y) + g(y)$$

但シ茲ニ $p_\nu(x,y)$ ハ x ニ関スル $(n-\nu)$ 次 y ニ関スル ν 次斉次式トスル。

確カニ F ハ U, V ノ上デ夫々 f, g ト一致スル. 又 F ハ n 次斉次ニナルコトモ明ラカデアル。

$\boxed{\text{註}}$ 斯カル一ツノ函数ガ存在ナラバ $F=f(x)+g(y)$ トスレバヨイ。

尚以上ノ Lemma カラ後ノ議論ハ斉次性函数集合トモ出来ル. ソレハ $f(x)=\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x)$ トシ各 f_ν ニ対シテ論ジ, 和ヲ取レバヨイ。

Theorem 2 ニツノ lin subspace U, V ノ上ノ夫々 m 次 n 次ノ多項式 $f(x), g(y)$ ハ次数ヲ $\mathrm{Max}(m, n)$ ニ保ッテ E 全体ニ拡張シ得ルタメノ必要且十分ナル条件ハ $D=U \wedge V$ ノ上デ

$$f(z) = g(z) \qquad z \in D$$

ナルコトデアル。

Definition ノ n 次斉次式 $f(x)$ ニ対シ, ソノ零点集合

$$M = \{x \mid f(x) = 0\}$$

ヲ n 次斉次集合トイヒ $(n \geqq 1)$, 如何ナル k 次斉次集合モ含マナケレバ $(n>k)$ 既約トイヒマス。

n 次斉次集合ハ $n>k$ ナル k ニ対シ k 次斉次集合ニナルコトモアリマス。 ニ一次斉次集合ハ既約デ Maximal lin subspace トナリマス。上定理ハ E ノ subspace ノ上ノ n 次斉次集合ヲ全体ニ n 次斉次性ヲ失ハズニ拡張出来ルコトヲ示シタワケデス。

（続ク）